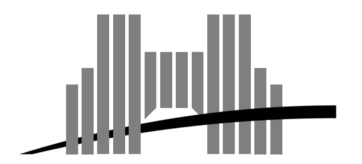


Ecole Normale Supérieure de LYON
Département des Sciences de la Matière

Mécanique des Fluides

Stéphane Ravier   Matthieu Rigaut

janvier 2000

Préface

Après 18 mois, j'ai décidé de reprendre la première version de ce cours de mécanique des fluides pour lui donner un petit "coup de jeune". Vous retrouverez l'intégralité des informations qui étaient présentes dans la première version mais complétées. En outre, des compléments ont été ajoutés et la présentation générale du document a été améliorée : elle a bénéficié de mes progrès sous LaTeX et est maintenant plus conforme aux standards de l'édition scientifique.

J'espère que ce cours vous donnera satisfaction. N'hésitez pas à me faire part de vos remarques, suggestions…

Stéphane Ravier (DSM 97)
Stephane@Ravier.org

Préface à la première version

Ce cours est un cours de base de la mécanique des fluides. Cette première version est largement inspirée du cours dispensé par M. JN. Gence à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon. Ce cours introductif doit permettre à tout lecteur d'aborder un ouvrage quelconque de mécanique des fluides. À l'avenir nous l'enrichirons de compléments selon notre inspiration et selon le temps dont nous disposerons. Nous donnons à la fin du cours une liste d'ouvrages de référence pour les lecteurs désireux d'en savoir plus.

Ce cours est de niveau licence mais il est en grande partie abordable par tous les étudiants de mathématiques spéciales PC*. La plupart des résultats énoncés sont démontrés, en revanche les calculs sont souvent réduits à leur plus simple expression car ce n'est évidemment pas ce qui présente le plus d'intérêt.

Nous tenons en particulier à remercier quelques étudiants de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon qui nous ont aidés dans notre tâche : V. Danjean du Département Mathématiques-Informatique (DMI) promotion 1997, C. Papazian promotion 1996, D. Chapot, E. Paluch et DC. Constantin du Département Sciences de la Matière (DSM) promotion 1997. Ils nous ont aidés à résoudre quelques problèmes survenus lors de l'utilisation du traitement de texte LaTeX et nous ont soutenus au fil de notre travail. Nous remercions enfin tous les étudiants qui ont accepté de relire ce cours.

Matthieu Rigaut (DSM 96)
Stéphane Ravier (DSM 97)

(avril 1998)

Avant-propos

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est bon de préciser quelques notations que nous allons utiliser abondamment dans ce cours.

– Nous utiliserons les mots "tenseur" ou “notation tensorielle”. Ici, cela signifie simplement que l'on travaille avec les composantes. Par exemple le vecteur $\overrightarrow{v}$ s'écrit en notation tensorielle : v_i, et de même le tenseur $\overset{\Rightarrow}{\mathrm{D}}$ n'est autre que la matrice D_{ij}.
– Nous emploierons le symbole $\stackrel{\wedge}{=}$ pour dire "égal par définition".
– Nous utiliserons (x_1, x_2, x_3) pour repérer les variables de l'espace cartésien.
– Nous utiliserons aussi la convention de sommation d'Einstein : quand le même indice est répété dans un produit, cela signifie que l'on somme tous les indices : $v_i \cdot \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} \stackrel{\wedge}{=} v_1 \cdot \dfrac{\partial v_j}{\partial x_1} + v_2 \cdot \dfrac{\partial v_j}{\partial x_2} + v_3 \cdot \dfrac{\partial v_j}{\partial x_3}$. Notez qu'ici on ne somme que sur l'indice i, car l'indice j n'est pas répété et vaut 1, 2 ou 3. C'est une convention dont le seul avantage est de simplifier l'écriture des équations, et donc d'en améliorer la lisibilité (pourvu qu'on soit un peu habitué).

Chapter 1

Les fluides et le modèle de milieu continu

Ce bref chapitre va nous permettre de définir nos hypothèses de travail et en particulier de présenter le modèle de milieu continu.

I Généralités sur les fluides

Définition : on appelle fluides les états gazeux et liquide de la matière.

Les fluides n'ont pas de forme propre (à la différence des solides) donc ils se déforment facilement. Quand vous introduisez un fluide dans un récipient, ce dernier en épouse les formes. Les molécules de fluide sont peu liées entre elles (liquide) voire même libres et sans interaction mutuelle (gaz parfait).

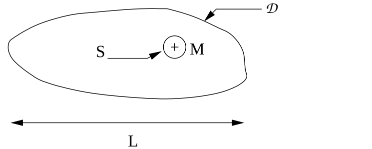
II Le modèle de milieu continu

II.1 Hypothèse de travail

On doit au préalable se donner une échelle de description. L'échelle macroscopique, celle du monde qui nous entoure, n'est pas adaptée notamment parce que le fluide n'a pas de cohérence spatiale à cette échelle (au contraire d'un solide cristallin). L'échelle microscopique ne convient pas non plus car il est techniquement impossible de collecter positions, vitesses, accélérations ... pour toutes les molécules de fluide ; de plus, cela n'aurait aucun intérêt. Nous allons donc nous placer à une échelle intermédiaire, l'échelle mésoscopique, échelle caractéristique des particules fluides. On considèrera toujours des domaines fluides macroscopiques dont la dimension caractéristique L est telle que $L \gg \lambda$ où λ est la distance moyenne intermoléculaire.

II.2 Notion de *particule fluide*

$L \gg \lambda$ implique immédiatement que nous considérerons toujours un grand nombre de molécules que nous regrouperons par paquets. Un paquet sera appelé *particule fluide*.



Soit $\mathcal{D}$ un domaine de dimension caractéristique L telle que $\dfrac{L}{\lambda} \gg 1$. Soient $M \in \mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}(M)$ de centre M et de rayon R tel que $\lambda \ll R \ll L$.

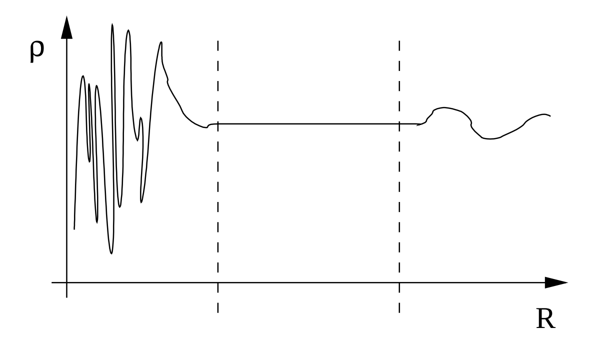
A l'instant t, on peut mesurer la masse de matière $m\Big(\mathcal{S}(M), t\Big)$ contenue dans $\mathcal{S}(M)$ et ce pour tout M de $\mathcal{D}$. On peut donc définir une masse volumique moyenne dans $\mathcal{S}(M)$ à l'instant t :

$$\rho\left(\mathcal{S}(\mathrm{M}),t\right)=\frac{m\left(\mathcal{S}(\mathrm{M}),t\right)}{\dfrac{4}{3}\pi\mathrm{R}^3}\overset{\wedge}{=}\rho(\mathrm{M},t)$$

$\mathcal{S}(\mathrm{M})$ est la particule fluide en M. On en déduit un champ de masse volumique sur $\mathcal{D}$.

Si on représente l'évolution de $\rho\left(\mathrm{M},t\right)$ en fonction de R, on peut distinguer 3 zones :

- pour R trop petit, on a trop peu de molécules qui sont contenues dans S : la masse volumique fluctue rapidement et perd donc toute signification ;
- pour un certain domaine de valeur, ρ garde une valeur constante : c'est dans ce domaine que l'on définit la particule fluide ;
- pour R trop grand, on commence à voir les variations de ρ en fonction de l'espace : contrairement à ce qui se passe quand r est trop petit, on a ici des variations lentes, dues au fait qu'on se place sur un domaine trop grand pour qu'il puisse être considéré comme uniforme.



De même, on peut définir à l'instant t la vitesse du centre d'inertie de la particule fluide que l'on applique, par convention, à M : on obtient un champ de vitesses sur $\mathcal{D}$. Par construction, ces champs sont continus.

II.3 Hypothèse supplémentaire

On supposera que toutes les grandeurs physiques $\mathrm{F}(\mathrm{M},t)$ définies par la précédente méthode (masse volumique, vitesse, ...) sont continuement dérivables aux ordres utiles à la traduction des principes de la physique macroscopique.

Chapter 2

Cinématique des fluides

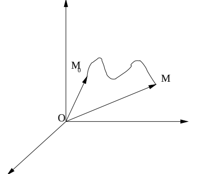
Nous allons à présent voir ce qu'est la cinématique des fluides c'est-à-dire nous intéresser aux différentes manières qui s'offrent à nous pour *décrire* un système fluide en mouvement. Notons qu'ici, seule la description du mouvement nous intéresse : l'aspect dynamique fera l'objet du chapitre 5.

Il existe en mécanique des fluides deux modes principaux de description : les descriptions *lagrangienne* et *eulérienne*. Nous les étudierons successivement, en déterminant également les formules qui existent pour passer de l'une à l'autre.

I Description lagrangienne

I.1 Définition

Dans cette description, l'observateur suit chaque particule fluide à partir de l'instant initial.



Autrement dit, chaque particule ne sera repérée que par son point de départ $\overrightarrow{\mathrm{OM}_0} = \overrightarrow{a}$, et par l'instant d'observation t : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(\overrightarrow{a}, t)$.

(a_1, a_2, a_3, t) sont les variables nécessaires à la description. Elles sont indépendantes entre elles et on les appelle *variables de Lagrange*. Pour connaître parfaitement l'évolution du fluide, il faut donc déterminer les 3 fonctions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(a_1, a_2, a_3, t) \\ x_2(a_1, a_2, a_3, t) \\ x_3(a_1, a_2, a_3, t) \end{array} \right.$$

I.2 Une propriété de base

Comme la fonction $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(\overrightarrow{a}, t)$ permet d'associer à chaque particule fluide à l'instant initial une et une seule particule fluide à l'instant t, cela signifie que la transformation est bijective. Autrement dit à chaque instant t, à chaque particule fluide, ne correspond qu'un seul point origine $\overrightarrow{a}$:

$$\boxed{\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(\overrightarrow{a}, t) \Longleftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(\overrightarrow{x}, t)} \tag{2.1}$$

I.3 Trajectoire des particules fluides

Il est très simple de déterminer les trajectoires des particules fluide dans la description lagrangienne : il suffit de suivre l'évolution d'une particule au fil du temps. Cela revient à fixer $\overrightarrow{a}$ et à faire varier t. L'ensemble des trajectoires est une famille de courbes à trois paramètres : $x_i = x_i(a_j, t)$, à a_j fixés.

I.4 Vitesse et accélération

I.4.1 Vitesse

Pour une particule fluide donnée, ie pour $\overrightarrow{a}$ fixé, la vitesse est donnée par :

$$\boxed{\tilde{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{a}, t) = \left.\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial t}\right|_{\overrightarrow{a}}} \tag{2.2}$$

Soit, en notation tensorielle :

$$\boxed{\tilde{v}_i(a_j, t) = \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{a_j}} \tag{2.3}$$

I.4.2 Accélération

Pour une particule fluide donnée, ie pour $\overrightarrow{a}$ fixé, l'accélération est donnée par :

$$\boxed{\tilde{\overrightarrow{\gamma}}(\overrightarrow{a}, t) = \left.\frac{\partial \tilde{\overrightarrow{v}}}{\partial t}\right|_{\overrightarrow{a}}} \tag{2.4}$$

Soit, en notation tensorielle :

$$\boxed{\tilde{\gamma}_i(a_j, t) = \left.\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t}\right|_{a_j}} \tag{2.5}$$

I.5 Cas d'une propriété physique quelconque

Dans cette description, les propriétés physiques se réfèrent aux particules fluides que l'on suit. Par exemple, on notera $\tilde{\mathrm{T}}(\overrightarrow{a}, t)$ la température à l'instant t de la particule fluide qui était en $\overrightarrow{a}$ à l'instant initial, sans se soucier de la position qu'elle occupe effectivement.

II Description eulérienne

II.1 Définition

Cette fois l'observateur est placé en un point M fixe du repère, et regarde passer les particules fluides devant lui. Ainsi, à deux instant différents, ce n'est pas la même particule qui occupe la position $\overrightarrow{x}(\mathrm{M})$ de l'observateur.

Notation : on notera $\mathrm{F}(\overrightarrow{x}, t)$ la valeur de la propriété F au point $\overrightarrow{x}$[1] à l'instant t.
Les variables permettant de décrire ainsi un tel système sont les trois coordonnées d'espace (repérant l'observateur), et l'instant d'observation. (x_1, x_2, x_3, t) sont appelées les *variables d'Euler*.

On montre qu'on peut prendre comme inconnues du mouvement les 3 fonctions :

$$\boxed{\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}, t) \Longleftrightarrow \begin{cases} v_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases}}$$

[1] $\overrightarrow{x}$ est fixe, rappelons le.

II.2 Lien entre les deux descriptions

Soit une propriété physique représentée par :
- la description lagrangienne $\tilde{\mathrm{F}}(\overrightarrow{a}, t)$;
- la description eulérienne $\mathrm{F}(\overrightarrow{x}, t)$.

$\mathrm{F}(\overrightarrow{x}, t)$ est la valeur à l'instant t de la propriété F au point $\overrightarrow{x}$ fixé de l'espace. C'est aussi la valeur de F pour la particule fluide qui se trouve en $\overrightarrow{x}$ à t ie $\tilde{\mathrm{F}}(\overrightarrow{a}, t)$ pour cette particule. Or au bout du temps t, la particule considérée se trouve en $\overrightarrow{x}(\overrightarrow{a}, t)$, donc en un point où F vaut $\mathrm{F}(\overrightarrow{x}(\overrightarrow{a}, t), t)$. Par égalité des deux, on trouve :

$$\boxed{\tilde{\mathrm{F}}(\overrightarrow{a}, t) = \mathrm{F}(\overrightarrow{x}(\overrightarrow{a}, t), t)} \tag{2.6}$$

Par un raisonnement analogue, on montre que :

$$\boxed{\mathrm{F}(\overrightarrow{x}, t) = \tilde{\mathrm{F}}(\overrightarrow{a}(\overrightarrow{x}, t), t)} \tag{2.7}$$

II.3 Equivalence des deux descriptions

On peut montrer que la connaissance de l'une des deux descriptions est équivalente à la connaissance de l'autre. On pourra donc utiliser dans chaque problème la description la plus adaptée.

II.4 Trajectoire en description eulérienne et notion de ligne de courant à un instant donné

II.4.1 Trajectoire

Définition : Ensemble des positions $\overrightarrow{x}$ occupées par une particule fluide donnée.

Elle est donc solution de : $$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}, t) \Longleftrightarrow \mathrm{d}x_i = v_i(\overrightarrow{x}, t)\,\mathrm{d}t$$

d'où : $$\boxed{\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x_1}{v_1(\overrightarrow{x}, t)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{v_2(\overrightarrow{x}, t)} = \frac{\mathrm{d}x_3}{v_3(\overrightarrow{x}, t)}}$$

On a trois équations du premier ordre, donc 3 constantes d'intégration. On obtient ainsi une famille de courbes à 3 paramètres.

Pour observer, au sens propre, des trajectoires, on peut mettre en suspension dans le milieu quelques particules et faire une photographie avec un temps de pose très long.

II.4.2 Ligne de courant à un instant t_0 fixé

Définition : Ligne dont la tangente en chacun de ses points est le vecteur vitesse de la particule fluide en ce point à un instant t_0 fixé.
Le long d'une telle ligne, à t_0 on a : $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = d\overrightarrow{x}$ parallèle à $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}, t_0)$, d'où :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x_1}{v_1(\overrightarrow{x}, t_0)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{v_2(\overrightarrow{x}, t_0)} = \frac{\mathrm{d}x_3}{v_3(\overrightarrow{x}, t_0)}} \tag{2.8}$$

Ici, comme on a un système de deux équations différentielles du premier ordre, on obtient une famille de fonctions à deux paramètres.

Pour observer les lignes de courant, il faut cette fois mettre en suspension une quantité importante de particules, et prendre une photo avec un temps de pose très court.

A priori, les trajectoires et les lignes de courant sont des entités différentes. Toutefois ces deux concepts sont identiques dans le cas d'écoulements stationnaires.

II.4.3 Cas particulier des écoulements stationnaire

Définition : Un écoulement est *stationnaire* si en description eulérienne les grandeurs sont indépendantes du temps.
On a donc pour toute propriété physique F : $\boxed{\mathrm{F} = \mathrm{F}(\vec{x})}$.
et en particulier :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})} \tag{2.9}$$

Dans ce cas, les trajectoires sont données par : $\dfrac{\mathrm{d}x_1}{v_1(\vec{x})} = \dfrac{\mathrm{d}x_2}{v_2(\vec{x})} = \dfrac{\mathrm{d}x_3}{v_3(\vec{x})} = \mathrm{d}t$

et les lignes de courant par : $\dfrac{\mathrm{d}x_1}{v_1(\vec{x})} = \dfrac{\mathrm{d}x_2}{v_2(\vec{x})} = \dfrac{\mathrm{d}x_3}{v_3(\vec{x})}$

Remarque : dans un écoulement stationnaire les différentes grandeurs F dépendent en général du temps en variables de Lagrange.

II.5 Accélération en variables d'Euler. Notion de dérivée particulaire d'une propriété physique quelconque

Remarque préliminaire : si $\vec{v}(\vec{x},t)$ est le champ eulérien de vitesse, et $\vec{\gamma}(\vec{x},t)$ celui d'accélération, il est clair que :

$$\vec{\gamma}(\vec{x},t) \neq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{v}(\vec{x},t+\delta t) - \vec{v}(\vec{x},t)}{\delta t}$$

car $\vec{v}(\vec{x},t+\delta t)$ et $\vec{v}(\vec{x},t)$ sont des vitesses de particules fluides différentes. Or on cherche le taux de variation de la vitesse d'une même particule fluide au cours du temps. On est donc obligé de revenir à la description de Lagrange.

Méthode : on va déterminer $\tilde{\vec{\gamma}}(\vec{a},t)$, on en déduira $\vec{\gamma}(\vec{x}(\vec{a},t),t)$ c'est-à-dire $\vec{\gamma}(\vec{x},t)$

On a (2.5) : $\tilde{\gamma}_i(\vec{a},t) = \dfrac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t}(\vec{a},t)$ et (2.6) : $\tilde{v}_i(\vec{a},t) = v_i(\vec{x}(\vec{a},t),t)$.
On obtient, par une formule de dérivation composée :

$$\tilde{\gamma}_i(\vec{a},t) = \left.\frac{\partial v_i}{\partial t}\right|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a},t)} + \underbrace{\left.\frac{\partial v_i}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a},t)} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t}(\vec{a},t) + \cdots}_{\left.\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|_{\vec{x}(\vec{a},t)} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t}(\vec{a},t)}$$

Or on a aussi (avec 2.2 puis 2.6) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j}{\partial t}(\vec{a},t) &= \tilde{v}_j(\vec{a},t) \\ &= v_j(\vec{x}(\vec{a},t)) \end{aligned}$$

et (2.6) : $\tilde{\gamma}_i(\vec{a},t) = \gamma_i(\vec{x}(\vec{a},t),t)$

L'équation précédente s'écrit donc :

$$\gamma_i(\vec{x}(\vec{a},t),t) = \left.\frac{\partial v_i}{\partial t}\right|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a},t)} + \left.\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|_{\vec{x}=\vec{x}(\vec{a},t)} \cdot v_j(\vec{x}(\vec{a},t),t)$$

et en écrivant simplement $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(\overrightarrow{a}, t)$, on obtient :

$$\boxed{\gamma_i(\overrightarrow{x}, t) = \left.\frac{\partial v_i}{\partial t}\right|_{\overrightarrow{x}, t} + v_j(\overrightarrow{x}, t) \cdot \left.\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|_{\overrightarrow{x}, t}} \tag{2.10}$$

On vient donc de calculer le taux de variation temporelle d'une grandeur attachée à une particule fluide qu'on suit, et que l'on a exprimé en variables d'Euler.

Définition : On appelle *dérivée particulaire* d'une grandeur, le taux de variation temporelle de cette grandeur en suivant une particule fluide à laquelle elle est attachée.

Notation : pour la propriété physique F, on la note $\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}t}$ avec le sens suivant :

- $\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \tilde{\mathrm{F}}}{\partial t}(\overrightarrow{a}, t)$ en variables de Lagrange
- $\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}(\overrightarrow{x}, t) + v_j(\overrightarrow{x}, t) \cdot \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_j}(\overrightarrow{x}, t)$ en variables d'Euler

En notant $\overset{\Rightarrow}{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}(\overrightarrow{v})$ le tenseur dont la matrice en coordonnées cartésiennes est $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\gamma}(\overrightarrow{x}, t) = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overset{\Rightarrow}{\mathrm{grad}}(\overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{v}$$

D'un point de vue pratique, on retiendra que l'accélération peut s'écrire sous différentes formes équivalentes :

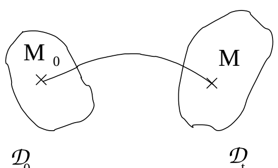
$$\boxed{\overrightarrow{\gamma}(\overrightarrow{x}, t) = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{v}}$$

ou encore :

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma}(\overrightarrow{x}, t) = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{v}}$$

II.6 Théorème de Reynolds

Soit un ensemble de particules fluides que l'on suit dans leur mouvement. L'ensemble occupe le volume $\mathcal{D}_t$ à l'instant t. Soit aussi une propriété physique représentée en variable d'Euler par $\mathrm{F}(\overrightarrow{x}, t)$.



La question est : quelle est la variation de la somme de cette valeur physique sur le volume $\mathcal{D}_t$ qui évolue au cours du temps ?

On montre que l'on a :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iiint_{\mathcal{D}_t} \mathrm{F}(\overrightarrow{x}, t)\mathrm{d}\tau\right) = \iiint_{\mathcal{D}_t}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathrm{F}.v_j)}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}\tau} \tag{2.11}$$

III Déformation d'une particule fluide

Le champ de vitesse $\overrightarrow{v}\left(\overrightarrow{x}, t\right)$ dépendant de la position $\overrightarrow{x}$, il est clair qu'une particule fluide va se déformer dans ce champ de vitesse. Dans cette partie, on s'intéresse au *tenseur des taux de déformation* (ou *tenseur des gradients de vitesse*) G_{ij} : $\mathrm{G}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. Nous allons interpréter ses effets sur l'évolution de la forme d'une particule fluide durant son mouvement dans le champ $\overrightarrow{v}\left(\overrightarrow{x}, t\right)$.

III.1 Réécriture du tenseur G_{ij}

Les effets de G_{ij} ne sont pas facilement interprétables directement car y sont mêlées plusieurs notions fort différentes :

- la dilatation des dimensions linéaires : ce type de déformation s'accompagne d'une variation du volume et la forme subit une homothétie[2] ;
- la rotation globale : ni la forme, ni le volume ne changent ;
- les déformations angulaires : la forme change mais le volume ne varie pas[3].

On commence donc par réécrire G comme somme d'une partie symétrique et d'une partie antisymétrique.

On a :

$$\mathrm{G}_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\mathrm{S}_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\mathrm{A}_{ij}}$$

S_{ij} est symétrique et A_{ij} est antisymétrique.

III.2 Interprétation de A_{ij}

En écrivant les composantes de A_{ij}, on remarque qu'on peut écrire A_{ij} sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \overrightarrow{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}$$

Si on considère un écoulement dans lequel le champ de vitesse est tel que les éléments de $\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{S}}}$ soient nuls, alors on a :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{x}$$

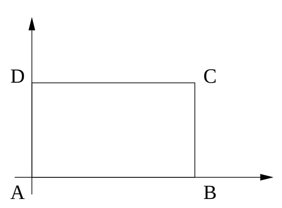
On obtient une égalité qui est caractéristique d'une rotation globale d'un solide indéformable (*cf* n'importe quel cours de Mécanique du Solide).

Le tenseur antisymétrique $\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{A}}}$ traduit une rotation globale de la particule fluide sans variation de forme ni de volume. $\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{A}}}$ est le tenseur des *taux de rotation local.*

III.3 Interprétation de S_{ij}

Le tenseur $\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{S}}}$ a deux types d'effets bien distincts selon qu'on considère ses termes diagonaux ou extra-diagonaux.

Pour fixer les idées, on va s'intéresser à une particule fluide à deux dimensions que nous représenterons par un rectangle infinitésimal de longueur $\mathrm{d}x_1$ et de hauteur $\mathrm{d}x_2$, de surface $\mathrm{dS} = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$. Ce rectangle sera repéré par ses quatres sommets A de coordonnées $(0,0)$, B$(\mathrm{d}x_1, 0)$, C$(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2)$ et D$(0, \mathrm{d}x_2)$.



On étudie la particule fluide à l'instant $t + \mathrm{d}t$ en calculant les coordonnées de A′, B′, C′ et D′.

La vitesse d'un point $\mathrm{M}(\mathrm{d}l_1, \mathrm{d}l_2)$ s'écrit : $\overrightarrow{v}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{v}(\mathrm{A}) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial x_i}\mathrm{d}l_i$

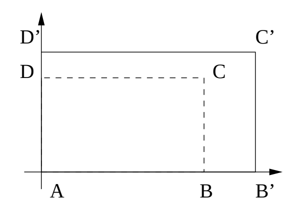
$\overrightarrow{v}(\mathrm{A})$ traduit une vitesse d'ensemble de la particule. On s'intéresse ici à l'action de $\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{S}}}$ donc ce mouvement de translation ne nous intéresse pas : on s'en débarasse en faisant un changement d'origine des temps et en ramenant l'origine du repère en A à l'instant $t + \mathrm{d}t$. Pour calculer les nouvelles positions, il suffit de remarquer que la variation de position $\mathrm{d}l_i$ entre t et $t + \mathrm{d}t$ pour la

[2] C'est-à-dire que la particule subit un changement d'échelle.

[3] En fait, il y a, on va le voir, une variation de volume mais cette dernière est d'ordre supérieure.

coordonnée i s'écrit : $\mathrm{d}l_i = \mathrm{d}v_i\,\mathrm{d}t$ et de traduire cette relation en tenant compte des coordonnées de départ[4].

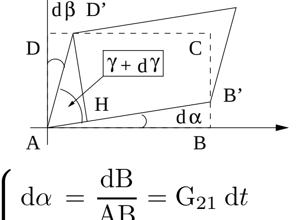
Effet des termes diagonaux :
Supposons que les termes G_{ij} avec $i \neq j$ sont nuls et que les termes diagonaux sont positifs.



$$\begin{array}{lcc} B' & : & (\mathrm{d}x_1 + G_{11}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}t, 0) \\ C' & : & (\mathrm{d}x_1 + G_{11}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x_2 + G_{22}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}t) \\ D' & : & (0,\ \mathrm{d}x_2 + G_{22}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}t) \end{array}$$

Comme $S_{ii} = G_{ii}$, il y a donc une <u>dilatation</u> de la particule fluide.

Effet des termes extra-diagonaux :
Supposons que les termes diagonaux sont nuls et que les termes non diagonaux sont positifs.



$$\begin{array}{lcc} B' & : & (\mathrm{d}x_1, G_{21}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}t) \\ C' & : & (\mathrm{d}x_1 + G_{12}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x_2 + G_{21}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}t) \\ D' & : & (G_{12}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x_2) \end{array}$$

On peut calculer les angles $\mathrm{d}\alpha$ et $\mathrm{d}\beta$ très simplement : $\begin{cases} \mathrm{d}\alpha = \dfrac{\mathrm{dB}}{\mathrm{AB}} = G_{21}\,\mathrm{d}t \\ .\mathrm{d}\beta = -\dfrac{\mathrm{dD}}{\mathrm{AD}} = -G_{12}\,\mathrm{d}t \end{cases}$.

On en déduit : $$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -2\,S_{12} = -2\,S_{21} = -\,(S_{12} + S_{21})$$

Calculons la surface de notre particule : $\mathrm{d}S' = D'H\,x\,AB' = AD'\,x\,\sin(\gamma + \mathrm{d}\gamma)\,x\,AD'$

Soit[6] : $$\mathrm{d}S' \simeq \mathrm{d}x_2\,(\sin\gamma + \mathrm{d}\gamma\cos\gamma)\,\mathrm{d}x_1 \simeq \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

Les termes non diagonaux du tenseur $\overset{\Rightarrow}{S}$ traduisent donc la vitesse de déformation angulaire de la particule. Ils ne modifient pas le volume de la particule fluide.

Le tenseur symétrique $\overset{\Rightarrow}{S}$ peut se décomposer comme suit :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{11} - q & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - q & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - q \end{pmatrix}$$

où : $$q = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} G_{ii} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} S_{ii}$$

Le premier terme traduit la dilatation (variation de volume) et le second la *vitesse des déformations angulaires.*

III.4 Sens physique de la divergence

En considérant une particule fluide de volume $\delta\tau$, de masse $\delta m = \rho\delta\tau$, on montre facilement que l'on a :

$$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{\delta\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\tau)$$

Cela signifie que $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{v})$ est le *taux relatif de variation de volume de la particule fluide au point considéré.*

[4]Les coordonnées à $t + \mathrm{d}t$ B′ du point B par exemple, sont obtenues en multipliant la matrice S_{ij} par le vecteur coordonnées B et par $\mathrm{d}t$.

[6]γ est l'angle à l'instant t soit $\frac{\pi}{2}$

Chapter 3

Traduction locale des principes de la physique macroscopique

Position du problème

On se donne les hypothèses de travail suivantes :
- le fluide est constitué d'une seule espèce ;
- on suppose que le fluide est placé dans le champ de pesanteur[1] ;
- le référentiel $\mathcal{R}$ est galiléen ;
- on travaille avec la description eulérienne.

Méthode générale de mise en équation :

> **Lemme :** si $f(\overrightarrow{x},t)$ est continue par rapport à $\overrightarrow{x}$ et par rapport à t, et si on a : $\forall \mathcal{D}, \iiint_{\mathcal{D}} f(\overrightarrow{x},t)\mathrm{d}\tau = 0$, alors $f(\overrightarrow{x},t) = 0$.

On envisagera toujours un domaine $\mathcal{D}$ fictif (créé par la pensée) de surface Σ, arbitraire, fixe par rapport à $\mathcal{R}$, traversé par le fluide, et on traduira les principes pour le fluide contenu dans $\mathcal{D}$ à t. Chaque principe conduit à un bilan intégral de la forme $\iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{B}(\overrightarrow{x},t)\,\mathrm{d}\tau = 0$. Et on en déduit la loi locale (grâce au lemme ci dessus) : $\mathrm{B}(\overrightarrow{x},t) = 0$.

On va traduire les principes :
- de la mécanique classique :
  - la conservation de la masse ;
  - le principe fondamental de la dynamique ;
- de la thermodynamique :
  - le premier principe ;
  - le deuxième principe.

I Traduction locale de la conservation de la masse

En physique classique, il n'y a ni création, ni disparition spontanée de masse.

[1] En particulier, on néglige tout phénomène électromagnétique : cela ne restreint pas la généralité de notre propos (seules les actions extérieures subies par le système seraient à modifier).

I.1 Equation de bilan local

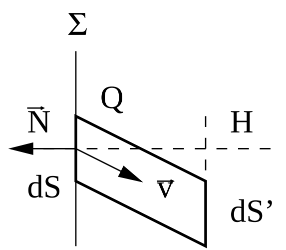
La masse de fluide contenue dans $\mathcal{D}$ à t vaut :

$$\boxed{m(t) = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\overrightarrow{x}, t)\, \mathrm{d}\tau} \tag{3.1}$$

Si elle varie de $\mathrm{d}m$ entre t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}m &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iiint_{\mathcal{D}} \rho(\overrightarrow{x}, t)\mathrm{d}\tau\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\overrightarrow{x}, t)\mathrm{d}\tau\right)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \mathcal{D} \text{ est } \underline{\text{fixe}} \text{ par rapport à } \mathcal{R} \end{aligned}$$

Cette masse a nécessairement traversé Σ pendant $\mathrm{d}t$. Calculons d'abord la masse $|\mathrm{d}^2 m|$ ayant traversé l'élément de surface dS



Soit $\overrightarrow{v}(\mathrm{Q}, t)$ la vitesse de la particule fluide en Q à t.
Entre t et $t + \mathrm{d}t$, la particule en Q vient en Q′ tel que $\overrightarrow{\mathrm{QQ'}} = \overrightarrow{v}(\mathrm{Q}, t)\,\mathrm{d}t$.
Les particules sur dS viennent en $\mathrm{dS'} \approx \mathrm{dS}$.

Donc la masse ayant traversé dS pendant $\mathrm{d}t$ est dans le cylindre de base dS et de hauteur QH. Ainsi la masse traversant dS pendant $\mathrm{d}t$ est :

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}^2 m| &= \rho(\mathrm{Q}, t)\,\mathrm{dS.QH} \\ &= \rho(\mathrm{P}, t)\,\mathrm{dS}|\overrightarrow{v}(\mathrm{P}, t).\overrightarrow{\mathrm{N}}|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On choisit le signe tel que $\mathrm{d}^2 m > 0$ si la particule rentre dans le domaine $\mathcal{D}$, et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 m &= -\rho(\mathrm{Q}, t)\,\mathrm{dS.QH} \\ &= \rho(\mathrm{Q}, t)\,\mathrm{dS}\overrightarrow{v}(\mathrm{Q}, t).\overrightarrow{\mathrm{N}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En intégrant sur toute la surface, on obtient la masse $\mathrm{d}m$ traversant Σ pendant $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}m = \left(-\oiint_{\Sigma} \rho\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{\mathrm{N}}\mathrm{dS}\right)\,\mathrm{d}t$$

On déduit alors :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau &= -\oiint_{\Sigma} \rho\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{\mathrm{N}}\mathrm{dS} \\ &= -\iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{div}\,(\rho\overrightarrow{v})\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Et ainsi : $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\overrightarrow{v})\right)\mathrm{d}\tau = 0$, est une relation vraie pour tout volume $\mathcal{D}$, donc on obtient l'expression locale de la *conservation de la masse* :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\overrightarrow{v}) = 0} \tag{3.2}$$

Cette relation s'écrit aussi : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0$

ou encore[3] : $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho .\, \mathrm{div}\,(\overrightarrow{v}) = 0$

I.2 Point de vue global

On a vu que la masse $\mathrm{d}m$ traversant Σ pendant $\mathrm{d}t$ etait telle que :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\oiint_{\Sigma} \rho \overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{N}}\,\mathrm{dS}} \tag{3.3}$$

$\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ est appelé le *débit masse* à travers Σ.

I.3 Conditions aux limites naturelles associées le long de surfaces imperméables

Définition : Une surface est dite *imperméable* si et seulement s'il n'y a pas de débit masse à travers elle.

I.3.1 Cas d'une paroi solide fixe par rapport à $\mathcal{R}$

La surface est imperméable donc le débit masse est nul pour toute surface élémentaire, d'où : $\forall \mathrm{Q} \in \Sigma,\ \rho(\mathrm{Q}, t)\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{N}}\,\mathrm{dS} = 0$.

Soit : $\boxed{\forall \mathrm{Q} \in \Sigma, \quad \overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{N}} = 0}$

Ainsi $\overrightarrow{v}(\mathrm{Q}, t)$ n'a *a priori* qu'une composante tangentielle à la surface, c'est à dire que seul le glissement est possible.

Remarque : L'expérience montre en fait que la condition limite réelle est plus forte puisque la particule adhére à la paroi.

I.3.2 Cas d'une paroi solide, mobile par rapport à $\mathcal{R}$

Notons :
- $\overrightarrow{\mathrm{U}}(\mathrm{Q}, t)$: la vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ de la paroi en Q ;
- $\overrightarrow{v}(\mathrm{Q}, t)$: la vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ de la particule fluide en Q à l'instant t.

En se plaçant dans le repère où le point Q de la paroi est immobile à l'instant t, on trouve :

$$\boxed{\forall \mathrm{Q} \in \Sigma, \quad \overrightarrow{v}(\mathrm{Q}, t).\overrightarrow{\mathrm{N}} = \overrightarrow{\mathrm{U}}(\mathrm{Q}, t).\overrightarrow{\mathrm{N}}} \tag{3.4}$$

Cela n'impose rien sur les composantes tangentielles, mais l'expérience montre que : $\overrightarrow{v}(\mathrm{Q}, t) = \overrightarrow{\mathrm{U}}(\mathrm{Q}, t)$

I.3.3 Cas d'une interface déformable entre deux fluides non miscibles

En notant l'équation de l'interface : $f(\overrightarrow{x}, t) = 0$, on montre que si $\overrightarrow{v}(\mathrm{Q}, t)$ est la vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ de la particule fluide en P à l'instant t, on a :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + v_j(\mathrm{Q}, t).\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0} \tag{3.5}$$

[3] En développant le deuxième terme et en reconnaissant l'expression de la dérivée particulaire.

I.4 L'approximation d'écoulement incompressible

Définition : On dira qu'un écoulement se comporte comme celui d'un fluide *incompressible* si le volume $\delta\tau$ de chaque particule fluide ne varie pas au cours du mouvement.

On obtient ainsi tout de suite :

$$\boxed{\mathrm{div}\,(\overrightarrow{v}) = 0} \tag{3.6}$$

Remarque : *A priori* cette relation impose seulement $\rho = \mathrm{cst}$ sur chaque trajectoire, mais pas forcément d'une trajectoire à l'autre. Toutefois, sans hypothèse supplémentaire, on considère en général l'adjectif *incompressible* comme équivalent à $\rho = \mathrm{cst}$ partout.

II Expression locale du principe fondamental de la dynamique

Rappel : pour tout système matériel S, il existe au moins un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen dans lequel on peut écrire :

$$\boxed{\mathcal{D}_{\mathrm{S}/\mathcal{R}} = \mathcal{F}_{\mathrm{e}\to\mathrm{S}}} \tag{3.7}$$

où :
- $\mathcal{D}_{\mathrm{S}/\mathcal{R}}$ est le torseur dynamique associé au mouvement de S par rapport à $\mathcal{R}$;
- $\mathcal{F}_{\mathrm{e}\to\mathrm{S}}$ est le torseur des efforts extérieurs à S.

II.1 Le torseur dynamique $\mathcal{D}_{\mathrm{S}/\mathcal{R}}$

$\mathcal{D}$ est défini par sa résultante et son moment en O :
résultante dynamique :
$\overrightarrow{\mathrm{A}}_{\mathrm{S}/\mathcal{R}} = \iint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\gamma}\,\mathrm{d}m = \iiint_{\mathcal{D}} \rho \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} d\tau$, c'est la somme des quantités d'accélération. **moment dynamique en O :**
$\overrightarrow{\delta}_{\mathrm{S}/\mathcal{R}}(\mathrm{O}) = \iint_{\mathrm{S}} \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{\gamma}\right) \mathrm{d}m = \iiint_{\mathcal{D}} \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \rho \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}\tau$, c'est la somme des moments en O des quantités d'accélération.
Pour calculer ces différentes expressions, il faut connaître l'expression analytique des efforts extérieurs : il faut les modéliser.

II.2 Schématisation des efforts extérieurs

On distinguera deux types d'efforts :
- les efforts à distance, agissant sans contact et donnés par une autre théorie ;
- les efforts de contact.

II.2.1 Schématisation des efforts à distance

Prenons l'exemple du champ de gravitation. On le schématise par une densité massique de force telle que chaque élément $dm = \rho d\tau$ est soumis à la force élémentaire :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{d}\to\mathrm{S}} = \rho\,\overrightarrow{g}\,\mathrm{d}\tau}$$

L'indice $\mathrm{d} \to \mathrm{S}$ signifie "à distance agissant sur S".

On en déduit :

- une résultante : $\overrightarrow{\mathcal{R}}_{\mathrm{d}\to\mathrm{S}} = \iiint_{\mathcal{D}} \rho \vec{g}\, \mathrm{d}\tau$;
- un moment en O : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{d}\to\mathrm{S}}(\mathrm{O}) = \iiint_{\mathcal{D}} \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \rho \vec{g}\right) \mathrm{d}\tau$.

II.2.2 Schématisation des efforts de contact le long de Σ

On les schématise grâce au postulat de Cauchy :
- l'action de contact le long de Σ du fluide extérieur à $\mathcal{D}$ sur le fluide intérieur est une densité surfacique de force, appelée contrainte, telle que en chaque élément dS de Σ la force exercée par l'extérieur sur l'intérieur soit : $d\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{c}\to\mathrm{S}} = \overrightarrow{\mathrm{T}} d\mathrm{S}$ où $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ est la *contrainte*.
- $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ est une fonction de Q, "centre" de dS, t le temps, et $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ la normale extérieure à $\mathcal{D}$ en Q.

On a donc :
$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{c}\to\mathrm{S}} = \overrightarrow{\mathrm{T}}(\mathrm{Q}, t, \overrightarrow{\mathrm{N}})\mathrm{dS}}$$

Remarque : $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ permet d'indiquer qui agit sur quoi.

II.3 Compatibilité du postulat de Cauchy avec le principe fondamental de la dynamique

On montre que le principe fondamental de la dynamique implique que le tenseur des contraintes $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ doit être une fonction linéaire en $\overrightarrow{\mathrm{N}}$[4]. C'est à dire que l'on a (en introduisant un opérateur linéaire $\overset{\Rightarrow}{\sigma}(\mathrm{M}, t)$) :

$$\overrightarrow{\mathrm{T}}(\mathrm{M}, \overrightarrow{\mathrm{N}}, t) = \overset{\Rightarrow}{\sigma}(\mathrm{M}, t) \circ \overrightarrow{\mathrm{N}} \Longleftrightarrow \mathrm{T}_i(\mathrm{M}, \overrightarrow{\mathrm{N}}, t) = \sigma_{ij}(\mathrm{M}, t).\mathrm{N}_j.$$

On en déduit, pour les effort le long de Σ :

une résultante : $\overrightarrow{\mathcal{R}}_{\mathrm{c}\to\mathrm{S}} = \iint_{\Sigma} \overset{\Rightarrow}{\sigma}(\mathrm{Q}, t) \circ \overrightarrow{\mathrm{N}}(\mathrm{Q})\mathrm{dS}$;

un moment en O : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{c}\to\mathrm{S}}(\mathrm{O}) = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \wedge \left(\overset{\Rightarrow}{\sigma}(\mathrm{Q}, t) \circ \overrightarrow{\mathrm{N}}(\mathrm{Q})\right) \mathrm{dS}$.

II.4 Traduction locale du théorème de la résultante dynamique

Ce théorème n'est rien d'autre que l'égalité des deux résultantes des torseurs dans l'équation fondamentale (3.7). On montre qu'il s'écrit sous la forme locale suivante, dite *équation de Cauchy* :

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}} \tag{3.8}$$

II.5 Traduction locale du théorème du moment dynamique

Ce théorème exprime, quant à lui, l'égalité des deux moments des torseurs dans l'équation fondamentale (3.7). On montre que cela implique que l'opérateur $\overset{\Rightarrow}{\sigma}$ doit être symétrique :

$$\boxed{\sigma_{ij}(\mathrm{M}, t) = \sigma_{ji}(\mathrm{M}, t)} \tag{3.9}$$

Cette symétrie de l'opérateur $\overset{\Rightarrow}{\sigma}$ signifie donc qu'il n'a que 6 composantes σ_{ij} indépendantes.

[4]En particulier, le principe de l'action et de la réaction montre immédiatement que $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ est une fonction impaire de $\overrightarrow{\mathrm{N}}$.

II.6 Point de vue intégral sur le théorème de la résultante dynamique

En réécrivant les équations locales précédentes, on obtient (après calculs) :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iiint_{\mathcal{D}} \rho \overrightarrow{v}\,\mathrm{d}\tau\right)}_{\mathrm{I}} = \underbrace{-\oiint_{\Sigma} \rho \overrightarrow{v}(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{N}})\mathrm{dS}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\iiint_{\mathcal{D}} \rho \overrightarrow{g}\,\mathrm{d}\tau + \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}\circ\overrightarrow{\mathrm{N}}\mathrm{dS}}_{\mathrm{III}},$$

où les termes représentent :

I : taux de variation de la quantité de mouvement dans $\mathcal{D}$;

II : débit de la quantité de mouvement à travers la surface Σ ;

III : résultante des efforts extérieurs.

II.7 Conditions limites naturelles associées au principe fondamental de la dynamique

Si nous avons déjà traduit localement le fait qu'une surface imperméable n'est pas traversée par de la matière, il reste à traduire les effets de contact.

II.7.1 Le long d'une paroi solide

On a immédiatement la condition suivante : $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(\mathrm{Q},t)\circ\overrightarrow{\mathrm{N}} = \overrightarrow{\mathrm{T}}(\mathrm{Q},\overrightarrow{\mathrm{N}},t)$, où $\overrightarrow{\mathrm{T}}(\mathrm{Q},\overrightarrow{\mathrm{N}},t)$ est la force exercée par la paroi. Malheureusement, cette dernière est généralement inconnue. D'ailleurs, c'est justement cette relation qui permet de remonter aux efforts exercés par ou sur une surface.

II.7.2 Interface entre deux fluides non miscibles

Par continuité du vecteur contrainte à travers la surface séparant les milieux 1 et 2 et en *négligeant la tension superficielle*, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}^{(1)}(\mathrm{P},t)\circ\overrightarrow{\mathrm{N}} = \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}^{(2)}(\mathrm{P},t)\circ\overrightarrow{\mathrm{N}}} \tag{3.10}$$

III Le premier principe de la thermodynamique

III.1 Rappel

Le premier principe peut s'énoncer ainsi :
Pour tout système fermé évoluant d'un état d'énergie totale E vers un état d'énergie totale $\mathrm{E}+\mathrm{dE}$, on peut écrire : $\mathrm{dE} = \delta\mathrm{W} + \delta\mathrm{Q}$ ou, si la transformation a lieu pendant le temps $\mathrm{d}t$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\mathrm{W}} + \mathcal{P}_{\mathrm{Q}}}$$

où :

- $\mathcal{P}_{\mathrm{W}}$: puissance échangée avec l'extérieur sous forme de travail ;
- $\mathcal{P}_{\mathrm{Q}}$: puissance échangée avec l'extérieur sous forme de chaleur.

Comme il nous faut un système fermé, on considèrera un ensemble donné de particules fluides que l'on suivra dans leur mouvement. On sera donc amené à utiliser le théorème de Reynolds (2.11).

III.2 La définition de E

A chaque instant, on peut calculer l'énergie $\delta\mathcal{E}$ d'une particule fluide de masse δm. On peut donc définir une énergie totale par unité de masse :

$$\boxed{e(\overrightarrow{x},t) = \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta m}}$$

On va ensuite supposer que l'énergie totale dans un volume $\mathcal{D}_t$ n'est autre que la somme des énergies de toutes les particules fluide. Cela revient à supposer que l'énergie d'interaction des particules fluides est négligeable par rapport à l'énergie de volume. Cela nous donne pour les particules dans le volume $\mathcal{D}_t$ à l'instant t :

$$\boxed{\mathrm{E}(t) = \iiint_{\mathcal{D}_t} \rho e \, \mathrm{d}\tau}$$

Le théorème de Reynolds permet de calculer $\dfrac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t}$ en suivant $\mathcal{D}_t$, et on obtient :

$$\boxed{\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t} = \iiint_{\mathcal{D}_t} \rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}\tau} \qquad (3.11)$$

III.3 Traduction locale

III.3.1 Calcul de $\mathcal{P}_{\mathrm{W}}$

En tenant compte de la puissance des forces à distance et de la puissance des forces de contact, on obtient (après calculs) :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{W}} = \iiint_{\mathcal{D}_t} \left(\rho g_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i \sigma_{ij}) \right) \mathrm{d}\tau} \qquad (3.12)$$

III.3.2 Calcul de $\mathcal{P}_{\mathrm{Q}}$

Le calcul est plus délicat car il faut schématiser la puissance thermique traversant Σ_t. On pose ainsi que chaque élément $d\mathrm{S}$ de Σ_t est traversé de l'extérieur vers l'intérieur par une puissance thermique $\phi \, \mathrm{dS}$. Nous supposerons que $\phi = \phi(\mathrm{Q}, \overrightarrow{\mathrm{N}}, t)$.

On montre que pour satisfaire le principe de conservation de l'énergie, $\phi(\mathrm{Q}, \overrightarrow{\mathrm{N}}, t)$ doit s'écrire sous la forme : $\phi(\mathrm{Q}, \overrightarrow{\mathrm{N}}, t) = -\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{N}}$, où $\overrightarrow{q}$ est appelé le *vecteur densité de flux de chaleur*.

On a ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{Q}} = -\iiint_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \mathrm{d}\tau} \qquad (3.13)$$

En regroupant les équations (3.11), (3.12) et (3.13), on obtient immédiatement l'expression locale du premier principe :

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \rho g_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i \sigma_{ij}) - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}} \qquad (3.14)$$

III.4 Autre expression du premier principe en terme d'énergie interne

Définition : En retirant à l'énergie totale d'une particule fluide son énergie cinétique, on obtient son *énergie interne* : $\boxed{u \triangleq e - \dfrac{v^2}{2}}$

En partant de la loi d'évolution de e (3.14) on obtient la loi locale d'évolution de u :

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sigma_{ij} \mathrm{S}_{ij} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}} \qquad (3.15)$$

où S_{ij} est le tenseur de cisaillement (*cf* chapitre 2, III.3).

IV La question du deuxième principe

A proprement parler, le deuxième principe permet uniquement d'éliminer certaines solutions des équations différentielles. Ainsi en toute rigueur l'expression locale du second principe se met sous la forme d'une inégalité.

Dans toute la suite, nous obtiendrons les informations manquantes à partir de l'expérience, qui nécessairement satisferont le second principe, de sorte qu'il sera inutile de recourir à cette inégalité.

V Bilan des inconnues et des équations

Bilan des équations :
- la formule de conservation de la masse (3.2) : 1 équation ;
- l'expression locale du théorème de la résultante dynamique (3.8) : 3 équations ;
- l'expression locale du théorème du moment dynamique (3.9) permet de n'avoir que 6 composantes indépendante pour σ_{ij} au lieu de 9 ;
- l'expression locale du premier principe (3.15) : 1 équation.

Nous avons donc 5 équations pour 14 inconnues (ρ, 3 v_i, 6 σ_{ij}, u et 3 q_j). Il est normal que nous ne puissions pas déterminer complètement la solution des équations puisque, somme toute, nous n'avons pas encore fait grand chose ! Nous nous sommes contentés de traduire quelques principes physiques très généraux. Les informations qui nous manquent proviennent des caractéristiques propres à chaque milieu. Comme il manque 9 relations, on peut les prendre du type : $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\rho, u, \text{mouvement})$ et $q_j = q_j(\rho, u, \text{mouvement})$. Ces relations reliant les contraintes et le flux de chaleur aux grandeurs thermodynamique s'appellent *les lois de comportement*. En ce qui concerne les fluides, nous les établirons à partir de l'expérience.

VI La particule fluide comme un système fermé en équilibre thermique

Chaque particule fluide peut être considérée comme un système fermé dont le temps de relaxation est très petit devant le temps caractéristique d'évolution du système complet, et ceci dans la majorité des situations que nous étudierons. Ainsi on supposera que chaque particule fluide à chaque instant est en équilibre thermodynamique, même si le système global est en déséquilibre.

Cela permet de définir pour chaque particule fluide et à chaque instant les grandeurs thermodynamiques définies à l'équilibre :
- la pression $\mathrm{P}(\overrightarrow{x}, t)$;
- la température $\mathrm{T}(\overrightarrow{x}, t)$;
- l'entropie spécifique (ie par unité de volume) $s(\overrightarrow{x}, t)$ ...

Nous pourrons donc écrire localement et à chaque instant toutes les relations de la thermostatique.

Chapter 4

Statique des fluides dans le champ de pesanteur

Dans ce chapitre, nous allons aborder l'étude de la statique des fluides. On va se placer dans le cas simple où le fluide n'est soumis qu'à un champ de pesanteur que l'on prendra en outre uniforme. Nous verrons en particulier le théorème d'Archimède et nous discuterons quelques modèles simples de l'atmosphère.

I Equation fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur

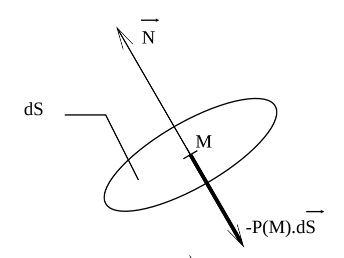
I.1 Fluide en équilibre

On suppose $\forall \overrightarrow{x_1}, \forall t, \quad \overrightarrow{v}(\overrightarrow{x_1}, t) = \overrightarrow{0}$. L'équation de conservation de la masse implique immédiatement que la masse volumique ρ ne dépend que des variables d'espace. Plus généralement, on se place à l'équilibre donc $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$. L'équation de Cauchy (3.8) se réduit à :

$$\rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \tag{4.1}$$

On doit déterminer $\rho(\overrightarrow{x})$ et $\sigma_{ij}(\overrightarrow{x})$. L'expérience va nous donner les lois de comportement.

I.2 L'apport expérimental



Lorsqu'un fluide est en équilibre dans le champ de pesanteur, l'expérience prouve qu'on a $\overrightarrow{\mathrm{T}}(\mathrm{M}, \overrightarrow{\mathrm{N}}) = \alpha(\mathrm{M})\overrightarrow{\mathrm{N}}$ avec $\alpha(\mathrm{M}) < 0$. On pose $\alpha(\mathrm{M}) = -\mathrm{P}(\mathrm{M})$.

Or on a vu que $\mathrm{T}_i(\mathrm{M}, \overrightarrow{\mathrm{N}}) = \sigma_{ij}(\mathrm{M}).\mathrm{N}_j$. On a donc la *loi de comportement à l'équilibre* :

$$\sigma_{ij}(\mathrm{M}) = -\mathrm{P}(\mathrm{M})\, \delta_{ij} \tag{4.2}$$

I.3 Equation de la statique dans le champ de pesanteur

D'après (4.1) et (4.2), on a immédiatement :

$$\boxed{\rho \overrightarrow{g} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P}} \tag{4.3}$$

Projetons cette relation. Si on prend $\overrightarrow{e_3}$ selon la verticale ascendante[1], on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_3} = -\rho g \end{cases}$$

qui s'écrit encore :

$$\boxed{\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}x_3} = -\rho(x_3)\, g} \tag{4.4}$$

On a donc une seule équation (de mécanique) pour 2 inconnues ρ et P : il nous faut une relation supplémentaire.

II Cas particulier où ρ peut être supposé constant sur la hauteur du domaine

L'intégration de (4.4) ne pose aucune difficulté. Si on choisit $\mathrm{P}(h) = \mathrm{P}_0$ comme condition aux limites (cas à la surface libre d'un liquide), et comme les contraintes sont continues à la traversée de la surface libre, on obtient la *formule de Pascal* :

$$\boxed{\mathrm{P}(x_3) = \mathrm{P}_0 + \rho_0 g(h - x_3)}$$

III Cas où l'on prend en compte les variations de ρ

III.1 Relation générale

On ne peut plus intégrer directement (4.4), il faut ajouter des informations sur le fluide venant de la thermodynamique. Or l'équilibre d'un liquide ou d'un gaz se traduit par une relation entre deux paramètres seulement. Ainsi $\mathrm{P}(x_3)$ et $\rho(x_3)$ permettent *a priori* de caractériser complètement cet équilibre. Le premier principe qui s'écrivait (3.15) : $\rho \left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + v_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \sigma_{ij} \mathrm{S}_{ij} - \dfrac{\partial q_j}{\partial x_j}$, se réduit ici à $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{q}) = \overrightarrow{0}$ puisqu'on a $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
Il faut faire appel à l'expérience pour avoir la loi donnant $\overrightarrow{q}$.

Pour un liquide ou un gaz, on a la *loi de Fourier* : $\overrightarrow{q} = -\Lambda\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{T}$, où Λ, la *conductibilité thermique* dépend *a priori* de ρ et de u. Or la thermodynamique nous donne $\rho(\mathrm{T})$ et de $u(\mathrm{T})$. A l'équilibre, on a donc :

$$\mathrm{div} \left(\Lambda\, (\rho(\mathrm{T}), u(\mathrm{T}))\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{T} \right) = 0$$

et comme ici T ne dépend que de x_3. Il reste :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3} \left(\Lambda(\mathrm{T}) \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}x_3} \right) = 0}$$

Avec des conditions aux limites, on peut déterminer $\mathrm{T}(x_3)$ ce qui fournit une relation supplémentaire.

---

[1] c'est-à-dire que $\overrightarrow{g} = -g\, \overrightarrow{e_3}$. Il faut toujours préciser le repère choisi car le résultat de la projection en dépend.

III.2 Application à 3 modèles simples d'atmosphère

On considère l'atmosphère comme un gaz parfait. On a l'*équation d'état des gaz parfaits* que l'on peut écrire :

$$\rho = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{RT}} \tag{4.5}$$

où M est la masse molaire ($\mathrm{M} = 28,8.10^{-3}$ kg.mol^{-1}) et R la constante des gaz parfaits ($\mathrm{R} = 8,314$ J.K^{-1}.mol^{-1}).

III.2.1 Atmosphère isotherme

Compte-tenu de (4.4), on obtient immédiatement : $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0\, e^{\left(-\frac{\mathrm{M}gx_3}{\mathrm{RT}}\right)}$.

III.2.2 Atmosphère à gradient thermique constant

On a :

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 - \kappa x_3 \qquad (\kappa \simeq 6 \text{ K.km}^{-1}) \tag{4.6}$$

(4.4) et (4.5) donnent : $$\mathrm{dP} = -\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{RT}} g\, \mathrm{d}x_3$$

Soit, avec (4.6) : $$\mathrm{dP} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{KRT}} g\, \mathrm{dT}$$

et donc : $$\mathrm{P} = \mathrm{P}_0 \left(\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_0}\right)^{\frac{\mathrm{M}g}{\mathrm{KR}}}$$

III.2.3 Atmosphère adiabatique

On a l'*équation de Laplace* :

$$\frac{\mathrm{P}}{\rho^\gamma} = \text{cste} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\mathrm{C}_p}{\mathrm{C}_v} \tag{4.7}$$

En prenant la différentielle logarithmique :

de (4.7) $$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}} = \gamma \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

et de (4.5) $$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}} - \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{T}}$$

on obtient après élimination de ρ : $$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{T}}$$

En utilisant (4.4) et (4.5), on trouve : $$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}} = -\frac{\mathrm{M}g\, \mathrm{d}x_3}{\mathrm{RT}}$$

L'élimination de P entre ces 2 expressions donne : $\mathrm{dT} = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mathrm{M}g}{\mathrm{R}}\, \mathrm{d}x_3$

On a donc une atmosphère à gradient thermique constant $\kappa' = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mathrm{M}g}{\mathrm{R}}$. L'application numérique donne $\kappa' \simeq 10$ K.km^{-1}, ce qui correspond à l'idée courante (un degré pour 100 m).

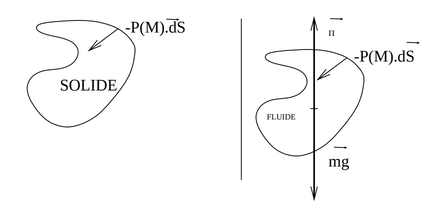
IV Théorème d'Archimède

IV.1 Enoncé

Théorème : Soit un fluide *en équilibre* et un solide que l'on plonge dans ce fluide. La résultante des forces de pression exercées par le fluide sur le solide est un glisseur opposé au poids du fluide déplacé.

Le terme glisseur signifie que, dans le torseur[2] global des actions, le moment est nul : il n'y a pas de couple associé.

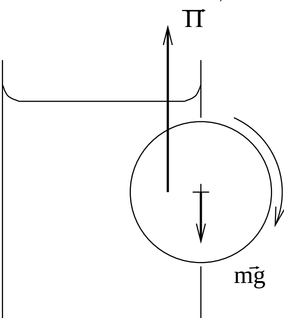
IV.2 Démonstration



On remplace le solide par du fluide (par la pensée). La distribution des forces de pression ne change pas (les forces de pression ne dépendent que de la surface) or le fluide est en équilibre donc la somme des forces extérieures appliquées est nulle.

IV.3 Mouvement perpétuel ?

Toto, qui vient d'étudier le théorème d'Archimède, a eu l'idée de génie suivante : couper les parois d'un bocal pour y insérer un cylindre et mettre de l'eau. D'après le théorème d'Archimède, le cylindre subit, pour sa partie immergée, une force dont l'intensité est égale au poids du fluide déplacé. Il en résulte un couple donc le cylindre se met à tourner autour de son axe (on néglige la poussée d'Archimède dans l'air). Toto vient donc de créer le mouvement perpétuel.



Vous pouvez faire l'expérience et constater que... cela ne fonctionne pas, évidemment. Le **raisonnement précédent est FAUX** car, si on enlève le cylindre et qu'on le remplace par du fluide, ce dernier n'est pas en équilibre puisqu'il tombe par le trou. Le théorème d'Archimède ne peut donc pas s'appliquer dans ces conditions.

[2]Un torseur, c'est une résultante et un moment.

Chapter 5

Ecoulements incompressibles de fluides newtoniens

Dans ce chapitre, nous allons définir ce qu'est un fluide newtonien et nous allons aborder l'étude de son mouvement. Nous serons amenés à introduire un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds qui est très important en mécanique des fluides car il permet de classifier les écoulements. On se limite ici au cas des écoulements où les variations de ρ sont négligeables.

I Comportement d'un fluide "usuel" au voisinage d'une paroi plane

On s'intéresse à un écoulement stationnaire tel que les lignes de courant soient parallèles à $\overrightarrow{e_1}$ et que le champ de vitesse ne dépende pas de $\overrightarrow{e_3}$. On a donc $v_2 = v_3 = 0$ et $v_1(x_1, x_2)$ *a priori*. Mais l'incompressibilité de l'écoulement (3.6) implique immédiatement $v_1(x_2)$.

I.1 Résultats expérimentaux

Expérimentalement, on obtient les résultats suivants :

1. $\lim_{x_2 \to 0} v_1(x_2) = 0$: **les particules fluides en contact avec la paroi y adhèrent**.
2. La contrainte $\overrightarrow{\mathrm{T}}_{\text{fluide}\to\text{paroi}}(\mathrm{M})$, pour tout point M de la paroi possède, entre autres, une composante tangentielle dans le sens de l'écoulement : **le fluide tire la paroi**.
3. Cette contrainte tangentielle est **proportionnelle au gradient de vitesse** à travers la paroi $\left.\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}$ et **le coefficient de proportionnalité ne dépend que du fluide**.

On introduit μ, *coefficient de viscosité dynamique* :

$$\overrightarrow{\mathrm{T}}_{\text{fluide}\to\text{paroi}}.\overrightarrow{e_2} = \mu \left.\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} \tag{5.1}$$

I.2 Phénoménologie

- Les particules fluides en contact avec la paroi adhèrent à celle-ci.
- Les particules fluides au dessus glissent sur celles qui sont en dessous en frottant.
- Le frottement est transmis à la paroi par les particules fluides immobiles.

On comprend que,dans ces conditions , μ ne dépende que de la nature du fluide.

I.3 Viscosité dynamique

Une analyse dimensionnelle à partir de (5.1) donne : $[\mu] = \mathrm{M.L^{-1}.T^{-1}}$
μ s'exprime, dans le système international, en *Poiseuille*, symbole Pl. Dans les conditions normales, $\mu_{\mathrm{eau}} = 10^{-3}$ Pl et $\mu_{\mathrm{air}} = 18.10^{-6}$ Pl. On utilise usuellement le *Poise*, symbole Po (1 Po = 0,1 Pl).

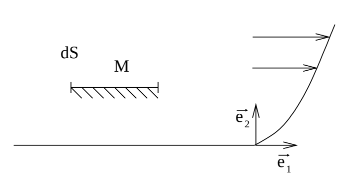
La viscosité dynamique dépend de la température et de la pression mais elle varie plus en fonction de la température que de la pression. Elle augmente avec la température pour les gaz et diminue pour les liquides.

On retiendra :

> Supposer μ uniforme et constant revient à supposer qu'il n'y a pas de variation notable de température dans l'écoulement.

II Hypothèse de Newton, notion de fluide newtonien

II.1 Hypothèse de Newton



Soit dS en M tel que $\overrightarrow{\mathrm{dS}}$ soit selon $\overrightarrow{e_2}$. On s'intéresse à l'action du dessus sur le dessous à travers dS : $\overrightarrow{\mathrm{T}}(\mathrm{M}, \overrightarrow{e_2}) = \overset{\Rightarrow}{\sigma} \circ \overrightarrow{e_2}$. Cette relation peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{T}_1 \\ \mathrm{T}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La contrainte tangentielle à travers dS est donc $\mathrm{T}_1(\mathrm{M}) = \sigma_{12}(\mathrm{M})$. L'hypothèse de Newton consiste à supposer que le résultat obtenu expérimentalement au niveau de la paroi est valable partout, d'où :

$$\boxed{\sigma_{12}(\mathrm{M}) = \mu \left.\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x_2}\right|_{\mathrm{M}}}$$

II.2 Généralisation à un écoulement quelconque

On cherche la relation générale entre σ_{ij} et le mouvement, compatible avec le cas précédent et le comportement à l'équilibre (Chapitre 4). En outre, on sait qu'on peut considérer qu'une particule fluide est en équilibre thermodynamique à chaque instant. On peut donc définir sa pression $\mathrm{P}(\mathrm{M}, t)$. Dans le cas général, on pose : $\sigma_{ij}(\mathrm{M}, t) = -\mathrm{P}(\mathrm{M}, t)\, \delta_{ij} + \tau_{ij}(\mathrm{M}, t)$.

De plus, on a nécessairement, comme $\overset{\Rightarrow}{\sigma}$ est symétrique, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Ayant obtenu $\tau_{12} = \mu \dfrac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x_2}$, on peut le généraliser de la manière suivante, en tenant compte du caractère symétrique de $[\tau_{ij}]$:

$$\tau_{ij}(\mathrm{M}, t) = \mu \left(\left.\frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_j}\right|_{\mathrm{M}} + \left.\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial x_i}\right|_{\mathrm{M}} \right) = 2\mu\, \mathrm{S}_{ij}$$

> **Définition :** On appelle *fluide newtonien* un matériau dont la loi de comportement, lorsqu'on peut négliger les variations de ρ, s'écrit :
>
> $$\begin{cases} \overset{\Rightarrow}{\sigma}(\mathrm{M}, t) = -\mathrm{P}(\mathrm{M}, t)\, \overset{\Rightarrow}{\mathrm{Id}} + 2\mu\, \overset{\Rightarrow}{\mathrm{S}}(\mathrm{M}, t) \\ \sigma_{ij}(\mathrm{M}, t) = -\mathrm{P}(\mathrm{M}, t)\, \delta_{ij} + 2\mu\, \mathrm{S}_{ij} \end{cases} \qquad (5.2)$$

Les liquides "usuels" et tous les gaz sont des fluides newtoniens.

III Equation de Navier-Stokes dans le cas où μ et ρ sont constants et uniformes

III.1 Ecritures scalaire et vectorielle

En reportant la loi de comportement (5.2) dans l'équation de Cauchy (3.8), on obtient immédiatement les *équations de Navier-Stokes* :

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \rho\, g_i - \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_i} + \mu \,\triangle v_i \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \rho \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \rho \overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{P} + \mu\,\Delta \overrightarrow{v} \\ \mathrm{div}\ \overrightarrow{v} = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

III.2 Simplifications d'écriture

III.2.1 Pour la pression et le champ de pesanteur

On a[1] $\overrightarrow{g} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(g\,x_3)$. Comme ρ est uniforme (hypothèse de base du chapitre), on a $\rho\overrightarrow{g} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\rho g\,x_3)$. On peut donc s'affranchir de la pesanteur en définissant une nouvelle pression $\mathrm{P}^\star$ par :

$$\mathrm{P}^\star \triangleq \mathrm{P} + \rho g\, x_3$$

III.2.2 Pour la viscosité

Dans tous les cas où ρ est constant, on a intérêt à diviser les deux membres de la première équation de Navier-Stokes par ρ. Il apparaît alors la *viscosité cinématique* : $\nu \triangleq \dfrac{\mu}{\rho}$.
La première équation de Navier-Stokes s'écrit maintenant :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\mathrm{P}^\star}{\rho}\right) + \nu\Delta\overrightarrow{v}$$

ν a les dimensions d'un coefficient de diffusion, $\mathrm{L}^2.\mathrm{T}^{-1}$. Il faut cependant bien comprendre que la viscosité cinématique n'a rien à voir avec la viscosité dynamique : c'est un artifice de calcul qui <u>ne mesure en aucun cas la viscosité</u>. Pour bien s'en convaincre, il n'y a qu'à faire le rapport entre ν_{eau} et ν_{air} et comparer avec le rapport entre μ_{eau} et μ_{air} ($\nu_{\mathrm{eau}} = 10^{-6}$ m^2.s^{-1} et $\nu_{\mathrm{air}} = 15.10^{-6}$ m^2.s^{-1}).

IV Précisions sur les conditions aux limites naturelles

La loi de comportement (5.2) permet de préciser les conditions aux limites déjà introduites dans les chapitres précédents. En particulier, il nous faut traduire la condition d'adhérence.

IV.1 Sur le champ de vitesse

- **le long d'une paroi, mobile ou non, par rapport au référentiel :** avec les mêmes notations qu'au chapitre 3, on a : $\forall \mathrm{Q} \in \Sigma,\ \overrightarrow{v}(\mathrm{Q},t) = \overrightarrow{\mathrm{U}}(\mathrm{Q},t)$.
- **le long d'une interface entre 2 fluides non miscibles :** L'expérience prouve qu'il y a continuité du champ de vitesse à travers l'interface.

[1] Les variations de $\overrightarrow{g}$ sont toujours négligeables dans les cas pratiques.

IV.2 Sur le tenseur des contraintes à l'interface entre 2 fluides non miscibles en négligeant les effets de tension superficielle

Il découle de (3.10) et de (5.2) :

$$-P^{(1)}N_i + \mu^{(1)}\left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i}\right)N_j = -P^{(2)}N_i + \mu^{(2)}\left(\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(2)}}{\partial x_i}\right)N_j$$

V Quelques solutions analytiques des équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes[2] sont non linéaires (accélération convective, $v_i\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}$) et du second ordre. Les seules solutions analytiques connues sont des solutions particulières qui satisfont des symétries compatibles avec les limites et pour lesquelles les termes non linéaires s'annulent exactement : ces solutions ne sont pas toujours observées.
Pour des conditions aux limites suffisamment régulières, on ne sait même pas démontrer l'unicité des solutions. Expérimentalement, on constate même une grande sensibilité aux conditions initiales dans les cas où la turbulence[3] peut apparaître. On ne peut alors pas prédire si une solution que l'on a calculée sera ou non observée.

V.1 Ecoulements unidirectionnels

On cherche à caractériser les solutions des équations de Navier-Stokes dans le cas où le champ de vitesses $\overrightarrow{v}(M,t)$ est parallèle à une direction fixe que l'on prendra pour axe des x_1. Les inconnues sont $P^\star(x_1,x_2,x_3,t)$ et $v_1(x_1,x_2,x_3,t)$. L'équation de conservation de la masse (3.6) montre immédiatement que v_1 ne dépend pas de x_1. L'écriture des équations amène au résultat intéressant suivant :

Théorème : Dans un écoulement *unidirectionnel, incompressible* de fluide newtonien, $P^\star$ est constante dans chaque plan orthogonal à la direction de l'écoulement.

En outre, les termes non linéaires sont rigoureusement nuls, de sorte que :

$$\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial t}\overrightarrow{e_1} \tag{5.4}$$

L'équation (5.3) s'écrit, compte tenu de (5.4) :

$$\rho\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P^\star}{\partial x_1} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right)$$

En regroupant dans un même membre les termes qui dépendent de x_1, on constate qu'on aboutit à une équation du type $\varphi_1(x_1,t) = \varphi_2(x_2,x_3,t)$ donc il existe une fonction $G(t)$ telle que :

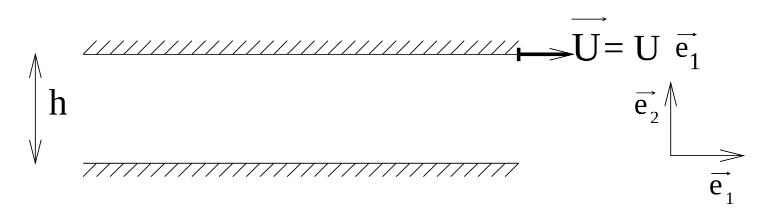
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial P^\star}{\partial x_1} = G(t) \Longrightarrow P^\star(x_1,t) = G(t)x_1 + h(t) \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial t} - \mu\left(\dfrac{\partial v_1^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial v_1^2}{\partial x_3^2}\right) = -G(t) \end{array}\right. \tag{5.5}$$

Il reste à déterminer G et h.

[2] Par abus de langage, on désignera par équation de NS, la seule équation de Cauchy pour les fluides newtoniens.
[3] C'est-à-dire des champs de vitesses aléatoires (*cf* chapitre 9).

V.2 Ecoulement unidirectionnel stationnaire entre 2 plans infinis

On appelle h la distance entre les 2 plans. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ attaché au plan inférieur ; le plan supérieur est animé, dans $\mathcal{R}$, de la vitesse $\overrightarrow{\mathrm{U}} = \mathrm{U}\overrightarrow{e_1}$ avec $\mathrm{U} = \mathrm{C^{te}}$.



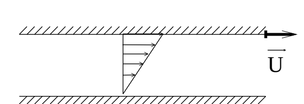
On cherche une solution unidirectionnelle, stationnaire pour l'écoulement entre les 2 plaques. On supposera l'invariance par translation selon $\overrightarrow{e_2}$ (ce qui revient à supposer $\partial/\partial x_2 = 0$). On cherche donc $\mathrm{P}^\star(x_1)$ et $v_1(x_3)$ telles que :

$$\begin{cases} \mathrm{P}^\star &= \mathrm{G}x_1 + \mathrm{H} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 v_i}{\mathrm{d}x_3^2} &= \dfrac{\mathrm{G}}{\mu} \end{cases} \qquad \text{où G et H sont des constantes à déterminer.}$$

En outre, on a les conditions aux limites : $\begin{cases} v_1(0) = 0 \\ v_1(h) = \mathrm{U} \\ \text{P en amont et en aval} \end{cases}$

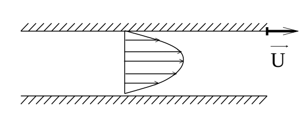
On obtient alors : $$v_1(x_3) = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}x_1}x_3(x_3 - h) + \frac{\mathrm{U}x_3}{h}$$

Cas où $\dfrac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}x_1} = 0$ et $\mathrm{U} > 0$:



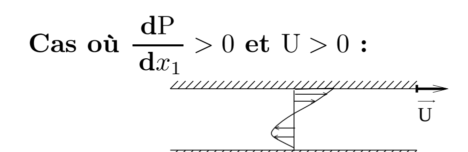
On a $v_1 = \dfrac{\mathrm{U}x_3}{h}$. Dans ce cas, le mouvement du fluide est créé par l'entraînement dû au mouvement de la plaque supérieure. Le mouvement est lié aux effets de frottements.

Cas où $\dfrac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}x_1} < 0$ et $\mathrm{U} = 0$:



On a $v_1(x_3) = \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}x_1}x_3(x_3 - h)$. On a un profil de vitesse parabolique. L'analyse des forces exercées sur la particule fluide radiale montre immédiatement que le gradient de pression compense les forces de frottement.

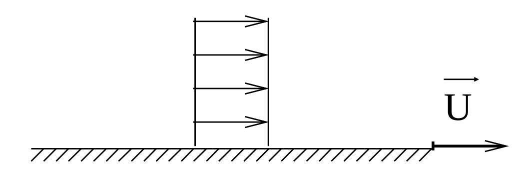
Cas où $\dfrac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}x_1} > 0$ et $\mathrm{U} > 0$:



Le gradient de pression s'oppose à l'effet d'entraînement : cela peut aller jusqu'à un écoulement inverse.

Remarque : Ces solutions ne sont obtenues que pour certaines valeurs des paramètres : en deça de ces valeurs, l'écoulement est instable, instationnaire et souvent turbulent.

V.3 Exemple en régime non permanent



Initialement, on a un plan surmonté d'un fluide, le tout se déplaçant à la vitesse uniforme $\mathrm{U}\overrightarrow{e_1}$. On stoppe brutalement le plan à $t = 0$. Les particules fluide qui adhèrent au plan s'arrêtent

brutalement et les couches de fluide vont se ralentir au cours du temps en frottant sur les couches inférieures.
On cherche une solution unidirectionnelle selon x_1 et ne dépendant pas de x_2. Avant l'arrêt, P était uniforme, il est logique de supposer qu'elle le reste après. L'équation de Navier-Stokes donne :

$$\boxed{\frac{\partial v_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}} \tag{5.6}$$

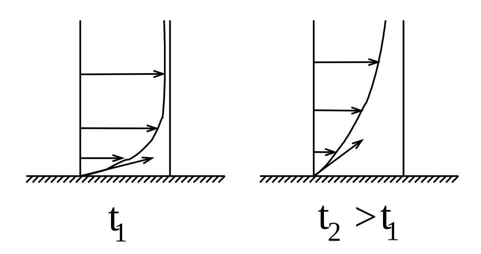
On reconnaît l'équation de la diffusion selon $\overrightarrow{e_3}$.

Compte-tenu des conditions : $\begin{cases} v_1(x_3, t < 0) = \mathrm{U} \\ v_1(0, t \geqslant 0) = 0 \end{cases}$

la solution s'écrit : $v_1(x_3, t) = \mathrm{U}.\mathrm{Erf}\left(\frac{x_3}{\sqrt{4\nu t}}\right)$

où Erf est la fonction d'erreur définie par : $\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, \mathrm{d}u$

On obtient les profils de vitesse :



Comment évaluer l'épaisseur de la zone ralentie à t ? On peut, par exemple, considérer que cette zone correspond à un domaine où v_1 est inférieure à une fraction convenue de U. On trouve alors que l'épaisseur de cette couche est en $\delta(t) \simeq \sqrt{\nu t}$. On peut ainsi diviser le domaine de l'écoulement en 2 régions à l'instant t : l'une qui sera sensiblement ralentie et une autre où les particules fluides se déplacent quasiment sans frottement. Les particules se déplacent donc sans frottement pendant une durée t telle que $x_3 \simeq \sqrt{\nu t}$[4] ; elles parcourent donc une distance L de l'ordre de $\mathrm{U}t = \frac{\mathrm{U}x_3^2}{\nu}$. On a donc une épaisseur relative donnée par :

$$\boxed{\frac{\delta(\mathrm{L})}{\mathrm{L}} \simeq \sqrt{\frac{\nu}{\mathrm{UL}}}}$$

On voit ici apparaître un nombre sans dimension, le *nombre de Reynolds*, très important en mécanique des fluides : $\mathcal{R}_e = \frac{\mathrm{UL}}{\nu}$

Si on considère l'écoulement autour d'une aile d'oiseau, on constate que des couches de freinage, dites *couches limites*, prolongées par un sillage vont se développer de part et d'autre. A l'extérieur de ces couches limites et du sillage, les gradients de vitesse sont suffisamment faibles pour que les frottements soient négligeables ; on pourra traiter l'écoulement dans cette zone par un modèle de fluide non visqueux dit *modèle de fluide parfait* (Chapitre 6). En revanche, à l'intérieur des couches limites, on peut développer un modèle simplifié de l'équation de Navier-Stokes dit *modèle de la couche limite* (Chapitre 7). On raccorde ensuite les deux solutions sans jamais résoudre complètement l'équation de Navier-Stokes.

[4] On peut prendre $0,95\mathrm{U}$ par exemple ; sachant que $\mathrm{Erf}(2) \simeq 0,95$, on trouve $\delta(t) = 4\sqrt{\nu t}$

VI Ecoulements dans l'approximation de Stokes

Dans ce qui précède, on a vu que les termes non linéaires s'annulaient. Evidemment, il n'en est pas toujours de même. Cependant, dans un grand nombre de cas, on peut les négliger devant les autres termes : c'est l'*approximation de Stokes*.

VI.1 Ordres de grandeur - *Nombre de Reynolds*

On se propose de comparer l'ordre de grandeur des termes non linéaires à celui des termes de viscosité. Pour cela, on se donne :

- **une échelle de variation de vitesses :** U (pour évaluer les dérivées spatiales de v_i).
- **une échelle de longueur** sur laquelle on a une variation sensible de U : L.
- **une échelle de vitesse** que l'on peut prendre égale à U (avec éventuellement un changement de référentiel).

On a alors :

$$\left|\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right| \sim \rho \frac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{L}} \quad \text{et} \quad \left|\mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\right| \sim \mu \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{L}^2}$$

Donc :

$$\frac{\left|\rho v_j \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|}{\left|\mu \dfrac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\right|} \sim \mathcal{R}_e$$

Où on définit le *Nombre de Reynolds* par :

$$\boxed{\mathcal{R}_e = \frac{\mathrm{UL}}{\nu}} \tag{5.7}$$

Les écoulements pour lesquels l'approximation de Stokes est justifiée sont donc tels que $\mathcal{R}_e \ll 1$.

Remarque : On a : $\mathcal{R}_e = \dfrac{\text{termes non linéaires}}{\text{termes visqueux}}$

VI.2 Système d'équations de Stokes

Si, en plus, l'écoulement est stationnaire, (5.3) s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = -\dfrac{\partial \mathrm{P}^\star}{\partial x_i} + \mu \triangle v_i \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P}^\star = \mu \Delta \overrightarrow{v} \\ \mathrm{div}\ \overrightarrow{v} = 0 \end{array}\right. \tag{5.8}$$

C'est un système linéaire qui ne pose plus de difficulté de résolution. En outre, $\mathrm{P}^\star$ est harmonique. En mécanique des fluides, on déduira toujours l'ordre de grandeur des variations de pression (à ρ constant) à partir des autres termes de l'équation. Ici, on a :

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P}^\star\right| \sim \frac{\delta \mathrm{P}}{\mathrm{L}} \quad \text{et} \quad \left|\mu \Delta \overrightarrow{v}_i\right| \sim \mu \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{L}^2}$$

d'où :

$$\delta \mathrm{P} \sim \mu \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{L}}$$

Physiquement, les variations de pression compensent les frottements visqueux pour obtenir une accélération nulle (régime stationnaire).

VI.3 Formule de Stokes pour la sphère

On considère une sphère immobile dans le référentiel $\mathcal{R}$ de rayon a plongée dans un écoulement uniforme. On appelle Σ_{lat} sa surface. On prend $\mathcal{R}_e = \dfrac{U_\infty a}{\nu}$, que l'on suppose petit devant 1. Quelle est la force $\overrightarrow{F}_{\text{fluide}\to\text{sphère}}$ exercée par le fluide sur la sphère ?

Par définition, on a : $$\overrightarrow{F}_{\text{fluide}\to\text{sphère}} = \iint_{\Sigma_{\text{lat}}} \overset{\Rightarrow}{\sigma}(M) \circ \overrightarrow{N} dS$$

Il faut calculer les champs de vitesse et de pression, solutions du système de Stokes. Tout calcul fait, on trouve la *formule de Stokes* qui est vérifiée expérimentalement à moins de 1 % jusqu'à $\mathcal{R}_e \simeq 0,3$:

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{fluide}\to\text{sphère}} = 6\pi\,\mu\,a\,\overrightarrow{U_\infty}}$$

le paradoxe de Stokes : *A posteriori*, on peut calculer les termes non linéaires et constater que l'approximation de Stokes n'est pas vérifiée dans tout l'écoulement[5] et pourtant ces résultats sont en bon accord avec l'expérience.
Le point discutable, c'est notre hypothèse selon laquelle les termes non linéaires sont négligeables partout. En fait, on a de la chance : en remettant complètement en cause les conditions aux limites du problème, on aurait pu modifier la solution. Les termes non linéaires sont bien négligeables au voisinage immédiat du profil. Les calculs que l'on a menés (notamment la force exercée sur le profil) sont bien valables dans cette zone.

VII Le nombre de Reynolds comme paramètre de base en mécanique des fluides à ρ constant

On classe les écoulements en fonction de leur nombre de Reynolds.

1. Si $\mathcal{R}_e \ll 1$, on a l'approximation de Stokes. Il n'y a plus de problème mathématique mais on se retrouve face au paradoxe de Stokes. . .
2. Si $\mathcal{R}_e \gg 1$, il faut distinguer 2 cas :
   - **dans les écoulements autour d'un corps**, il se forme des couches limites et un sillage d'autant plus petits que le nombre de Reynolds est grand. A l'extérieur, on peut utiliser un modèle de fluide parfait. A l'intérieur, on développe l'approximation de la couche limite (Chapitre 7). Cependant, au delà d'une certaine valeur de $\mathcal{R}_e$, l'écoulement devient instable et il faut faire appel aux théories de la stabilité et de la turbulence.
   - **à l'intérieur de parois**, là aussi, la turbulence apparaît au delà d'une certaine valeur de $\mathcal{R}_e$ qui dépend de la géométrie de l'écoulement. Ici aussi, on utilise des théories adéquates.

[5] Ce qui rend normalement caduque notre calcul. . .

Chapter 6

Le modèle du fluide parfait incompressible et irrotationnel

Ce modèle est particulièrement bien adapté à la description des écoulements lorsque les gradients de vitesse sont suffisamment faibles pour que l'on puisse négliger les frottements. En particulier il concerne les zones externes aux couches limites et au sillage.

Dans ce chapitre, on supposera que couches limites et sillage sont assez minces pour que l'on puisse les négliger géométriquement. En conséquence, le domaine de fluide parfait sera étendu jusqu'aux parois.

I Equations de base

I.1 Loi de comportement

En négligeant les frottements : $\boxed{\overrightarrow{\overrightarrow{\Sigma}}(\mathrm{M},t) = -p(\mathrm{M},t)\ \overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{I}}} \Longleftrightarrow \sigma_{ij}(\mathrm{M},t) = -p(\mathrm{M},t)\,\delta_{ij}}$
Cela revient à dire que les contraintes sont orthogonales aux parois.
De l'équation de Cauchy, on tire l'équation d'Euler :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \rho\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \rho\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{P}) = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{P}+\rho\mathrm{U}) \\ \mathrm{div}\,(\overrightarrow{v}) = 0 \end{array}\right.} \tag{6.1}$$

où U est le potentiel associé aux forces massiques : pesanteur ou autres. Pour fixer les idées, nous considérerons que seule la gravité intervient dans notre problème (c'est-à-dire $\mathrm{U} = g\,x_3$). On a donc 4 équations pour 4 inconnues ($\mathrm{P}(\overrightarrow{x},t)$, $v_i(\overrightarrow{x},t)$). On peut déterminer les solutions avec :

- des conditions initiales : $\mathrm{P}(\overrightarrow{x},0) = \mathrm{P}_0(\overrightarrow{x})$, $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},0) = \overrightarrow{v_0}(\overrightarrow{x})$;
- des conditions à l'infini : si $||\overrightarrow{x}|| = ||\overrightarrow{\mathrm{OM}}|| \to \infty$, $\mathrm{P}(\overrightarrow{x},t) \to \mathrm{P}_\infty(t)$ et $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t) \to \overrightarrow{v}_\infty(t)$;
- des conditions aux limites :
  - sur le champ de vitesse : on retrouve les conditions aux limites naturelles (3.4) et (3.5) ;
  - sur le tenseur des contraintes : en négligeant la tension superficielle, on obtient la continuité de la contrainte (3.10) soit ici : $\mathrm{P}^{(1)}(\mathrm{M},t) = \mathrm{P}^{(2)}(\mathrm{M},t)$.

II Cas particulier des écoulements stationnaires

Pour un tel écoulement, aucune grandeur physique en description eulérienne ne dépend du temps, d'où :

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}t} = v_j\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_j}}$$

II.1 La première forme du théorème de Bernoulli

Dans le cas présent, l'équation d'Euler (6.1) possède une intégrale première qui traduit le fait que l'énergie mécanique totale d'une particule fluide se conserve au cours du temps car il n'y a pas de frottements.

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{P} + \rho \mathrm{U}) \\
\rho \vec{v}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= -\vec{v}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{P} + \rho \mathrm{U}) \\
\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right) &= -v_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathrm{P} + \rho \mathrm{U}) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho\frac{\mathrm{V}^2}{2}\right) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{P} + \rho \mathrm{U})
\end{aligned}$$

d'où :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{P} + \rho \mathrm{U} + \frac{\mathrm{V}^2}{2}\right) = 0$$

Et ainsi on a pour chaque particule fluide que l'on suit, donc sur chaque trajectoire :

$$\boxed{\mathrm{P} + \rho \mathrm{U} + \frac{v^2}{2} = \mathrm{cst}} \qquad (6.2)$$

Or l'écoulement étant stationnaire, cette relation est vraie sur chaque ligne de courant.

Théorème de Bernoulli : Dans un écoulement stationnaire, incompressible, de fluide parfait soumis à des forces de masse dérivant du potentiel U on a, sur chaque ligne de courant :
$$\mathrm{P} + \rho \mathrm{U} + \frac{v^2}{2} = \mathrm{cst}$$

On verra que cette constante est la même sur chaque ligne de courant car l'écoulement est irrotationnel.
Remarque : pour les gaz, on peut négliger les effets de gravité, ce qui simplifie l'expression du théorème de Bernoulli en : $\mathrm{P} + \frac{v^2}{2} = \mathrm{cst}$

II.2 Projection de l'équation d'Euler dans le trièdre de Frénet d'un ligne de courant

La projection de l'équation d'Euler sur la base de Frenet d'une ligne de courant permet, au delà de l'aspect purement mathématique, de donner une interprétation de certains termes et d'en tirer une conséquence importante.

Rappel : le trièdre de Frénet est défini par :
$$\left\{\begin{aligned}
\vec{\mathrm{T}}(\mathrm{M},t) &= \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}s} \\
\frac{\vec{\mathrm{N}}}{\mathrm{R}} &= \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s} \\
\vec{b}\,(\mathrm{M}) &= \vec{\mathrm{T}} \wedge \vec{\mathrm{N}}
\end{aligned}\right.$$

Après calculs, on obtient : $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\rho\dfrac{\mathrm{V}^2}{2}\right) &= -\dfrac{\partial}{\partial s}(\mathrm{P}+\rho\mathrm{U}) \quad \text{(I)} \\ \rho\dfrac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}} &= -\dfrac{\partial}{\partial n}(\mathrm{P}+\rho\mathrm{U}) \quad \text{(II)} \\ 0 &= -\dfrac{\partial}{\partial b}(\mathrm{P}+\rho\mathrm{U}) \quad \text{(III)} \end{cases}$

Conséquences

- L'équation (I) redonne Bernoulli.
- L'équation (II), dans le cas d'écoulements à lignes de courant parallèles et rectilignes ($\mathrm{R} = +\infty$) donne : $\dfrac{\partial}{\partial n}(\mathrm{P}+\rho\mathrm{U}) = 0$. Avec (III) on en déduit : $\mathrm{P}+\rho\mathrm{U} = cst$ dans les plans perpendiculaires à l'écoulement. On retrouve un résultat que l'on avait obtenu pour les écoulements unidirectionnels. (cf paragraphe V.1)
- L'équation (II) dans le cas où on néglige les forces de masse donne $\rho\dfrac{v^2}{2} = -\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial n}$, d'où le théorème suivant :

> **Théorème :** Dans un écoulement stationnaire de fluide parfait incompressible, en l'absence de force de masse, la pression augmente avec l'éloignement du centre de courbure.

Ce théorème traduit simplement le fait que pour que la trajectoire d'une particule fluide soit incurvée, il faut qu'elle subisse d'un côté une force plus importante que l'autre. On peut illustrer par une petite expérience que l'on a tous fait : approchez une baguette du jet d'un robinet de telle sorte que la baguette soit orthogonale au jet et qu'elle intercepte une partie du jet ; vous constatez alors que le jet se courbe très nettement. La baguette induit une courbure dans le jet rectiligne ; il en résulte une augmentation des forces de pression à l'opposé de la baguette qui inclinent donc le jet vers la baguette.

III Evolution de $\overrightarrow{\omega}$ dans un écoulement de fluide parfait à ρ constant

On va montrer que si, à un instant donné, une particule fluide ne tourne pas sur elle même, elle ne sera jamais mise en rotation dans un écoulement de fluide parfait.
Physiquement, cela tient au fait que l'on néglige les forces tangentielles de frottements qui seules peuvent créer un couple permettant la mise en rotation.

III.1 Equation d'Helmholtz

En partant de l'équation d'Euler écrite sous sa forme équivalente suivante :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\mathrm{P}+\rho\mathrm{U}}{\rho}\right) \tag{6.3}$$

et en tenant compte de la relation de Bernoulli (6.2) on obtient, tous calculs faits, la relation suivante dite *équation d'Helmholtz* :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\omega_i}{\mathrm{d}t} = \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}}$$

III.2 Conséquences

On tire de l'équation d'Helmholtz le théorème suivant :

Théorème : Dans un écoulement de fluide parfait incompressible soumis à des forces de masse dérivant d'un potentiel, une particule fluide dont le taux de rotation est nul à un instant donné garde ensuite un taux de rotation nul.

Ainsi, tant que les particules fluides restent en dehors des couches limites et du sillage, ie restent dans le domaine de fluide parfait, elles ne tournent pas sur elles mêmes. Et donc *l'écoulement dans le domaine du fluide parfait est irrotationnel.*

IV Conséquences de $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$ sur la prédiction des écoulements de fluide parfait

IV.1 Potentiel de vitesse

Comme on a $\forall \overrightarrow{x}$, $\forall t$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$, on a :

$$\boxed{\exists\, \varphi(\overrightarrow{x},t), \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\varphi)} \tag{6.4}$$

φ est appelé le *potentiel vitesse.*

IV.1.1 Le problème posé en terme de fonction φ

En utilisant $div(\overrightarrow{v}) = 0$, (6.4), et les conditions aux limites naturelles (3.4), on obtient le système aux limites suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \triangle\varphi = 0 & \text{dans tout le domaine} \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\mathrm{Q}} = \overrightarrow{\mathrm{U}}(\mathrm{Q},t).\overrightarrow{\mathrm{N}} & \text{donné le long des parois} \\ \left.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi\right|_{\infty} = \overrightarrow{\mathrm{U}}_{\infty} & \text{donné} \end{cases}} \tag{6.5}$$

On est donc ramené à un problème linéaire "classique". On montre[1] que ce problème admet une unique solution si le domaine d'écoulement est connexe[2], et une infinité dans le cas contraire. On discrimine alors les solutions par des conditions physiques.

Remarque : $\varphi(\overrightarrow{x},t)$, solution de (6.5) est défini à une fonction arbitraire du temps près. En effet $\tilde{\varphi}(\overrightarrow{x},t) = \varphi(\overrightarrow{x},t) + f(t)$ est aussi solution de (6.5).

IV.2 Détermination du champ $\mathrm{P}(\overrightarrow{x},t)$ par la deuxième forme du théorème de Bernoulli

Puisque $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$, l'équation d'Euler (6.3) devient (en n'oubliant pas que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\varphi)$) :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho\frac{\mathrm{V}^2}{2} + \mathrm{P} + \rho\mathrm{U}\right) = 0$$

D'où la deuxième forme du théorème de Bernoulli :

[1] Résultat purement mathématique.
[2] ie n'a pas de trous.

Théorème : Dans un écoulement de fluide parfait incompressible soumis à des forces de masse dérivant d'un potentiel, le champ de vitesse dérive d'un potentiel φ et on peut écrire :

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho\frac{v^2}{2} + \mathrm{P} + \rho\mathrm{U} = g(t)$$

Comme φ est définie à une fonction du temps près, on peut prendre $g(t) = 0$. Si en plus l'écoulement est stationnaire : $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \Rightarrow g(t) = \mathrm{C}$, soit au final :

$$\mathrm{P} + \rho\mathrm{U} + \rho\frac{\mathrm{V}^2}{2} = \mathrm{C}$$

Ce qui montre que la constante est indépendante de la ligne de courant choisie.

IV.3 Comportement à l'infini de φ si $\overrightarrow{\mathrm{U}}_\infty = \overrightarrow{0}$

Intéressons nous au comportement de φ le long d'un cercle de rayon R. On sait[3] que l'on peut écrire pour $\mathrm{R} \to \infty$:

$$\varphi = \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1.\frac{1}{r} + \mathrm{C}_i.\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathrm{C}_{ij}.\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Ainsi au voisinage de l'infini, φ est une combinaison linéaire de solutions de l'équation de Laplace singulières en $r = 0$ dont les coefficients dépendent des condtions aux limites. Cette remarque suggère une méthode d'approximation de la solution du problème par des solution élémentaires.

V Cas particulier de l'écoulement plan

Définition : Un écoulement plan est un écoulement dont le champ de vitesse est, à tout instant, parallèle à un même plan, et qui ne varie pas perpendiculairement au plan.

On a donc :

$$\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}, t) = \left| \begin{array}{l} v_1(x_1, x_2, t) \\ v_2(x_1, x_2, t) \\ 0 \end{array} \right.$$

V.1 Notion de fonction de courant ψ

Ecrivons $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{v}) = 0$:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \longrightarrow \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_2}{\partial x_2}$$

Cela implique que la forme différentielle $v_1 dx_2 - v_2 dx_1$ est, à t fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction ψ :

$$\exists\psi(x_1, x_2, t), \quad \mathrm{d}\psi = v_1\,\mathrm{d}x_2 - v_2\,\mathrm{d}x_1$$

On a donc immédiatement :

$$v_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \qquad v_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \tag{6.6}$$

ψ s'appelle la fonction courant, car elle permet un calcul simple des lignes de courant. En effet, à partir de la définition (2.8), on obtient aussitôt : $\mathrm{d}\psi = 0$.

Les lignes $\psi(x_1, x_2, t) = \mathrm{C}(t)$ sont les *lignes de courant.*

[3] Simple développement mathématique.

Equation en ψ

On a encore $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$. Or pour un écoulement plan, la seule composante du rotationnel est perpendiculaire au plan, et s'écrit :

$$\omega_3 = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0$$

Ce qui implique, avec (6.6) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial {x_2}^2} = 0$$

Autrement dit, ψ est une fonction harmonique, car elle vérifie l'équation : $\triangle\psi = 0$
Il ne faut pas oublier les conditions aux limites.

A l'infini, on a :
$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial x_2}\right|_\infty = \mathrm{U}_{1\infty} \\ -\left.\dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}\right|_\infty = \mathrm{U}_{2\infty} \end{cases}$$

Pour exprimer la condition de glissement, on va orienter le contour $\mathcal{C}$ du corps dans le sens direct par son abscisse s. On a donc : $\overrightarrow{\mathrm{T}} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}s}$. On déduit $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ par une rotation de $\pi/2$.

Cela donne :
$$\overrightarrow{\mathrm{T}} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s} \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{N}} = \left| \begin{array}{lcl} \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} & = & \mathrm{N}_1 \\ -\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s} & = & \mathrm{N}_2 \end{array} \right.$$

La condition de glissement devient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{U}}(\mathrm{Q},t).\overrightarrow{\mathrm{N}} &= \overrightarrow{v}(\mathrm{Q},t).\overrightarrow{\mathrm{N}} \\ &= v_1.\mathrm{N}_1 + v_2.\mathrm{N}_2 \\ &= v_1.\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} - v_2\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s} \\ &= \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} \end{aligned}$$

Donc ψ est solution de :
$$\begin{cases} \triangle\psi = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{\mathrm{U}}.\overrightarrow{\mathrm{N}} \text{ pour tout point du profil} \\ \text{conditions à l'infini} \end{cases}$$

A priori, on en déduit $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t)$ dans le plan, d'où l'on tire φ (avec $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\varphi)$), et ensuite P par la deuxième forme du théorème de Bernoulli. Il paraît donc plus simple de résoudre le problème directement à partir de φ.

Remarque : si le corps est immobile par rapport à $\mathcal{R}$, alors $\overrightarrow{\mathrm{U}}(\mathrm{Q},t) = \overrightarrow{0}$ pour tous les points Q du contour $\mathcal{C}$.

Donc :
$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{\mathrm{U}}.\overrightarrow{\mathrm{N}} = 0$$

ce qui veut dire que ψ est constante le long du corps, et donc que $\mathcal{C}$ est une ligne de courant.
En revanche, si le corps est mobile dans $\mathcal{R}$, son contour n'a aucune raison d'être une ligne de courant.
Pour les écoulements plans incompressibles, on peut chercher le champ de vitesse à l'aide de 2 fonctions scalaires en résolvant deux équations harmoniques.

V.2 Notion de potentiel complexe

Soit un écoulement plan incompressible irrotationnel de fluide parfait. Les fonctions φ et ψ sont reliées dans le domaine de l'écoulement par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \\ v_1 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Si, en plus, ces deux quantités sont continues, ces relations, dites de Cauchy-Riemann, sont nécessaires et suffisantes pour que, dans le domaine $\mathcal{D}$ de l'écoulement, la fonction à valeur complexe $\varphi(x_1, x_2, t) + i\psi(x_1, x_2, t)$ soit :

- une fonction $f(z, t)$ (où $z = x_1 + ix_2$) définie en chaque point de $\mathcal{D}$;
- $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ existe en chaque point de $\mathcal{D}$.

On dit que f est *holomorphe* dans $\mathcal{D}$. On l'appelle le *potentiel complexe de l'écoulement dans* $\mathcal{D}$.
On remplace ainsi les problèmes en φ et en ψ par celui de la recherche d'une fonction holomorphe $f = \varphi + i\psi$ satisfaisant certaines conditions limites.

V.2.1 Quelques propriétés du potentiel complexe

Ce sont en réalité des propriétés des fonctions holomorphes. On pourra ainsi se reporter à n'importe quel livre traitant de la question.
Si les dérivées deuxièmes des fonctions φ et ψ existent et sont continues, on a : $\triangle\varphi = \triangle\psi = 0$.
Les lignes $\varphi = cst$ et $\psi = cst$ constituent des familles orthogonales.
Prenons un point M du domaine $\mathcal{D}$. Comme les lignes $\psi = \text{cst}$ et $\varphi = \text{cst}$ passant par M sont orthogonales, leurs normales le sont également. Or la normale à $\varphi = \text{cst}$ est portée par $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\varphi)$, de même pour ψ. On a donc le résultat suivant :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\varphi).\,\overrightarrow{\text{grad}}\,(\psi) = 0$$

La propriété de dérivabilité en tout point permet d'introduire la notion de vitesse complexe.

En effet : $$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + i\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$$

On peut donc écrire : $$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = w(z) = v_1 - iv_2$$

$w(z)$ s'appelle la vitesse complexe.

Remarque : Le complexe $w(z)$ n'est pas le complexe associé au vecteur vitesse, mais son conjugué.

Conclusion

Si l'on connaît le potentiel complexe $f(z) = \varphi + i\psi$ d'un écoulement dans $\mathcal{D}$, on connaît :

- les lignes de courant : $\psi = \text{Im}\ (f(z)) = \text{cst}$
- les équipotentielles : $\varphi = \text{Re}\ (f(z)) = \text{cst}$
- le champ de vitesse, avec $w(z) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = v_1 - iv_2$
- on a facilement accès au champ de pression, surtout si l'écoulement est stationnaire et si l'on néglige la pesanteur, grâce à l'équation de Bernoulli : $\mathrm{P} + \dfrac{1}{2}\rho v^2 = \mathrm{K}$. Comme $v^2 = |w(z)|^2$, on a aussitôt : $\mathrm{P} = \mathrm{K} - \dfrac{1}{2}\rho\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\dfrac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}z}$. K est facilement calculable avec les conditions aux limites.

V.3 Calcul des efforts exercés par le fluide sur un corps

Hypothèses de travail :
- écoulement de fluide parfait ;
- écoulement stationnaire ;
- corps au repos dans $\mathcal{R}$.

De toute façon, un système dans lequel le corps n'est pas au repos n'a pas de solution stationnaire.
Dans ce modèle, les seuls efforts de contact entre le fluide et le corps limité par le contour $\mathcal{C}$ sont les forces de pression.
Le torseur des efforts en O exercé par l'écoulement sur le corps est :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{R}} &= -\int_{\mathcal{C}} p.\overrightarrow{\mathrm{N}}\,\mathrm{d}s \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathrm{O}) &= \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge (-p.\overrightarrow{\mathrm{N}})\mathrm{d}s\end{aligned}$$

En réalité, ces quantités sont une force et un moment par unité de longueur perpendiculaire au plan.

V.3.1 Calcul de $\mathcal{R}$

Ce sont les formules de Blasius. On montre que :

$$\overrightarrow{\mathcal{R}} = i\frac{\rho}{2}\int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z$$

Cette intégrale est calculée grâce au théorème des résidus.

V.3.2 Moment en O

On montre également que l'on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathrm{O}) = -\frac{\rho}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{\mathcal{C}} z\left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz\right)$$

La connaissance du potentiel complexe d'un écoulement plan permet des études analytiques faciles.
On peut s'assurer que la recherche de $f(z)$ holomorphe est bien équivalente à la résolution en φ ou en ψ précédente.

V.4 Synthèse

Dans le problème de l'écoulement uniforme à l'infini autour d'un corps, on peut toujours considérer le corps comme immobile en se plaçant dans le référentiel attaché au corps.
On peut alors vérifier que la détermination de l'écoulement plan irrotationnel incompressible de fluide parfait revient à chercher le potentiel complexe $f(z)$ tel que :
- $f(z)$ holomorphe dans le domaine de l'écoulement : $\triangle\varphi = \triangle\psi = 0$;
- $\mathrm{Im}\,(f(z)) = cst$ et le long du corps : $\dfrac{\partial\psi}{\partial s} = 0$;
- les conditions à l'infini $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = w(z) \overset{z\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{U}_{1\infty} - i\mathrm{U}_{2\infty}$ soient vérifiées.

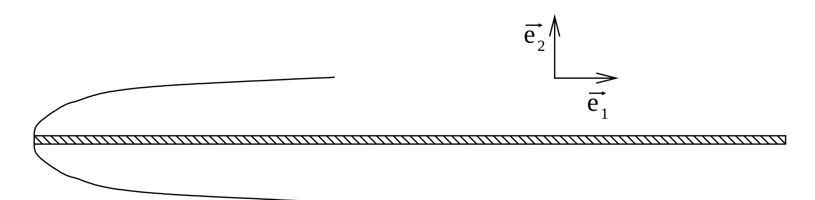
Pour construire la solution $f(z)$, on procède de la manière suivante :
- On connaît *a priori* des potentiels complexes d'écoulement élémentaires (source ponctuelle, puits ponctuel, tourbillon ponctuel...).
- Par combinaison linéaires de ceux-ci, on peut construire des potentiels complexes d'écoulements moins singuliers comme l'écoulement uniforme à l'infini s'effectuant autour d'un cercle avec une circulation donnée. Cet écoulement n'a *a priori* aucune application pratique.
- On démontre qu'avec une transformation conforme on peut transformer l'écoulement précédent en un écoulement uniforme à l'infini, de même circulation, mais autour d'un corps quelconque. Le problème est alors de trouver la transformation qui fait passer d'un cercle à la forme du corps souhaitée. C'est un problème de géométrie.

Tout ce chapitre reposait sur le fait qu'on a étendu le domaine de l'écoulement jusqu'au corps en négligeant géométriquement la couche limite et le sillage. Il n'est pas toujours possible de faire cette approximation, car dans certains cas, la couche limite s'épaissit, même à grand nombre de Reynolds.

Chapter 7

Théorie de la couche limite de Prandtl

La résolution des équations de Navier-Stokes est, on l'a vu, très difficile voire impossible. On va faire des approximations pour arriver à un système à résoudre plus simple. Ces approximations doivent nous permettre de déterminer vitesse de l'écoulement et pression dans la couche limite et le sillage qui accompagne les écoulements à grand nombre de Reynolds autour de solides profilés. La couche limite et le sillage sont d'autant moins épais que $\mathcal{R}_e$ est grand.



Dans tout ce chapitre, nous allons particulièrement nous intéresser au cas particulier de la couche limite d'un écoulement *stationnaire, incompressible* et *plan* d'une plaque plane semi-infinie. Nous négligerons en outre l'action de la pesanteur. On doit donc résoudre le système :

$$\left\{\begin{aligned} v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_1}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right)\\ v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_2}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right)\\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= 0\\ v_1(x_1,0) &= v_2(x_1,0)=0\\ v_1(x_1,+\infty) &= \mathrm{U}_\infty \end{aligned}\right. \tag{7.1}$$

I Les équations de Prandtl

Dans cette partie, nous allons utiliser une méthode courante en physique pour aboutir aux équations de Prandtl (1905) :

1. faire des analyses d'ordre de grandeur ;
2. introduire des échelles en conséquence ;
3. déterminer les mécanismes que l'on veut conserver ;
4. conclure en déterminant le système d'équations de Prandtl.

On utilisera la notation $o(\mathrm{X})$ pour l'ordre de grandeur de X[1].

[1] Attention à la confusion possible avec le “petit o” des mathématiques.

I.1 Les mécanismes de base

Reportons-nous d'abord au cas traité dans le chapitre 5 du plan brutalement freiné. On y avait établi que l'évolution de $v_1(x_2, t)$ était donnée par une équation de D'Alembert (5.6).
On avait alors 2 mécanismes de même importance en présence :
- le freinage représenté par $\dfrac{\partial v_1}{\partial t}$;
- la diffusion représentée par $\nu \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}$.

En outre, il est clair qu'ici $\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} \neq 0$ donc, d'après l'équation de conservation de la masse (3.6), v_2 n'est pas nulle. Si la couche est mince, on a $|v_1| \gg |v_2|$. Il faudra cependant prendre garde à conserver *a priori* des termes du type $v_2 \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}$ (en effet, même si v_2 est petit devant v_1, $\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}$ et donc le produit n'ont aucune raison de l'être). En conclusion, on peut dire qu'il nous faut garder les termes de freinage, de diffusion et que l'on a :

$$o\left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = o\left(\nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right) \tag{7.2}$$

A ces 2 mécanismes, il faut bien sûr ajouter la conservation de la masse.

I.2 Les échelles du problème

On a besoin de différentes échelles pour évaluer l'ordre de grandeur de chacun des termes des équations de Navier-Stokes. Il nous faut :
- une échelle U pour v_1 et ses variations,
- une échelle W pour v_2 et ses variations,
- une échelle de longueur L caractéristique des variations selon x_1 (pour évaluer $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$),
- une échelle de longueur δ caractéristique des variations selon x_2.

Avec les équations dont on dispose, on va relier ces échelles entre elles afin de déterminer lesquelles on choisira comme échelles *indépendantes.*

D'après (3.6), on a : $$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{W}}{\delta} = 0$$

D'où : $$\mathrm{W} = \mathrm{U}\frac{\delta}{\mathrm{L}}$$

D'après (7.2), on déduit : $$\frac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{L}} = \nu \frac{\mathrm{U}}{\delta^2}$$

qui donne immédiatement, en utilisant la définition du nombre de Reynolds (Chapitre 5, 5.7) :

$$\boxed{\frac{\delta}{\mathrm{L}} = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}}}}$$

On retrouve bien le fait que l'épaisseur relative de la couche limite diminue quand $\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}$ augmente. L'indice L signifie ici que la longueur caractéristique utilisée pour calculer $\mathcal{R}_e$ est L· Cette précision est importante, car il y a plusieurs longueurs caractéristiques dans le problème. On a 2 relations pour 4 échelles, il n'y a donc, en rélité, que 2 échelles indépendantes : on choisit U et L.

On déduit alors : $$\delta = \frac{\mathrm{L}}{\sqrt{\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}}} \quad \text{et} \quad \mathrm{W} = \frac{\mathrm{U}}{\sqrt{\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}}}$$

I.3 Simplification des équations

On va maintenant évaluer les termes des 2 premières équations de (7.1). On rappelle que l'on ne sait pas évaluer les termes de pression *a priori* donc on ne peut pas les négliger.

$$
\begin{array}{ll}
o\left(v_1\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) = \dfrac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{L}} & o\left(v_2\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = \dfrac{\mathrm{U}}{\sqrt{\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}}}\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{L}}\sqrt{\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}} = \dfrac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{L}} \\
o\left(\nu\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}\right) = \nu\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{L}^2} = \dfrac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{L}}\dfrac{1}{\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}} & o\left(\nu\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right) = \nu\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{L}^2}\mathcal{R}_{e\mathrm{L}} = \dfrac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{L}}
\end{array}
$$

Si $\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}$ est grand, on obtient : $v_1\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_1} + \nu\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}$

Pour la deuxième équation, on procède de la même façon et on obtient (on cherche à comparer chaque terme à $\dfrac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{L}}$) :

$$
\begin{array}{ll}
o\left(v_1\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) = \dfrac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{L}}\sqrt{\dfrac{1}{\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}}} & o\left(v_2\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) = \dfrac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{L}}\sqrt{\dfrac{1}{\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}}} \\
o\left(\nu\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}\right) = \nu\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{L}^2}\left(\dfrac{1}{\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}}\right)^{3/2} & o\left(\nu\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right) = \dfrac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{L}}\sqrt{\dfrac{1}{\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}}}
\end{array}
$$

En conservant les termes du même ordre que ci-dessus, on obtient simplement : $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_2} = 0$, c'est à dire que P ne dépend que de x_1. En se plaçant en x_2 suffisamment éloigné de la couche limite, on obtient donc : $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\infty(x_1)$.
En rassemblant les résultats précédents, on obtient *les équations de Prandtl* :

$$
\boxed{\begin{cases}
v_1\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\mathrm{P}_\infty}{dx_1} + \nu\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \\
\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0
\end{cases}}
$$

auxquelles il convient d'ajouter les conditions aux limites :

$$
\begin{cases}
v_1(x_1, 0) = v_2(x_1, 0) = 0 \\
v_1(x_1, +\infty) = \mathrm{U}_\infty
\end{cases}
$$

Remarque : on n'impose pas de condition sur v_2 à l'infini car un calcul plus rigoureux en théorie des perturbations montrerait que cela donnerait une condition de trop. On connaît seulement son ordre de grandeur $\left(\dfrac{\mathrm{U}_\infty}{\sqrt{\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}}}\right)$.

II Cas de la plaque plane sans gradient extérieur de pression

On suppose que la vitesse à l'infini est uniforme et constante ; on a donc, par application du théorème de Bernoulli (II.1) (loin de l'obstacle, on a un comportement de fluide parfait), P_∞ qui est constante. La solution que nous allons développer est due à Blasius. Le système de Prandtl se réduit à :

$$
\begin{cases}
v_1\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} = \nu\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \\
\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \\
v_1(x_1, 0) = v_2(x_1, 0) = 0 \\
v_1(x_1, +\infty) = \mathrm{U}_\infty
\end{cases}
\tag{7.3}
$$

II.1 Invariance du problème selon certaines affinités

Si on utilise des variables sans dimension, on peut écrire (7.3) sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{v}_1 \dfrac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}_1} + \tilde{v}_2 \dfrac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}_2} &= \dfrac{\partial^2 \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}_2^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}_1} + \dfrac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \tilde{x}_2} &= 0 \\ \tilde{v}_1 (\tilde{x}_1, 0) &= \tilde{v}_2 (\tilde{x}_1, 0) = 0 \\ \tilde{v}_1 (\tilde{x}_1, +\infty) &= 1 \end{cases} \tag{7.4}$$

où on a posé :

$$\begin{cases} \tilde{v}_1 = \dfrac{v_1}{\mathrm{U}_\infty} \\ \tilde{v}_2 = \dfrac{v_2}{\mathrm{U}_\infty} \sqrt{\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}} \\ \tilde{x}_1 = \dfrac{x_1}{\mathrm{L}} \\ \tilde{x}_2 = \dfrac{x_2}{\mathrm{L}} \sqrt{\mathcal{R}_{e\mathrm{L}}} \end{cases}$$

En faisant un calcul complet[2] (transformations linéaires selon les 4 variables du problème), on montre que le problème est invariant par la transformation :

$$\begin{cases} \tilde{v}_2 \longmapsto v_2' = y \tilde{v}_2 \\ \tilde{x}_1 \longmapsto x_1' = \dfrac{\tilde{v}_2}{y^2} \\ \tilde{x}_2 \longmapsto x_2' = \dfrac{\tilde{v}_2}{y} \end{cases} \tag{7.5}$$

On a donc une solution de la forme : $v_1' = \mathrm{F}(x_1', x_2')$

avec v_1',x_1',x_2' définis par (7.5). (7.5) laissant le système invariant quelque soit y, on peut choisir $y = \sqrt{\tilde{x}_1}$. v_1' est donc une fonction qui ne dépend que d'une variable :

$$\tilde{v}_1 = \mathrm{G}(\eta) \text{ où } \eta = \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{\tilde{x}_1}}$$

On a :

$$\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}_1} = \mathrm{G}'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}_1} = -\frac{1}{2\tilde{x}_1} \eta \mathrm{G}'(\eta)$$

Or, d'après l'équation de conservation de la masse (deuxième équation de 7.4), on a :

$$\tilde{v}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = -\int_0^{\tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{x}_1} \mathrm{d}\tilde{x}_2$$

qui conduit à :

$$\tilde{v}_2 = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{x}_1}} \int_0^{\eta} \alpha \mathrm{G}'(\alpha) \mathrm{d}\eta$$

En posant :

$$g(\eta) = \int_0^{\eta} \mathrm{G}(\alpha) \mathrm{d}\alpha$$

on obtient par intégration par partie :

$$\begin{cases} \tilde{v}_1 = g'(\eta) \\ \tilde{v}_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{\tilde{x}_1}} (\eta g' - g) \end{cases}$$

[2] On introduit 4 paramètres réels x, y, z, w et on effectuedes affinités ($v_1 \longmapsto x.v_1$ pour chaque échelle. On cherche ensuite les transformations qui laissent invariantes le système d'équation.

En reportant dans l'équation en $\tilde{v}_1$, on obtient l'*équation de Blasius* :

$$2g''' + gg'' = 0 \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} g'(0) &= 0 \\ g(0) &= 0 \\ g'(\infty) &= 1 \end{cases}$$

II.2 Confirmation expérimentale

Expérimentalement, on constate que pour une section à x_1 fixée le profil de vitesse est de la forme : $v_1 = \mathrm{U}_\infty \mathrm{F}\left(\dfrac{x_2}{\delta(x_1)}\right)$
où :
- F est universelle,
- $\delta(x_1)$ est l'épaisseur caractéristique de la couche limite en x_1 (par exemple la distance au bord telle que $v_1(x_1, x_2) \simeq 0,95\,\mathrm{U}_\infty$).

La solution est donc très particulière et la solution de Blasius est confirmée.

Conclusion :
L'expérience corrobore totalement les approximations de Prandtl tant que la turbulence n'apparaît pas.

Chapter 8

Ecoulements compressibles de fluides newtoniens

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au cas où les variations de masse volumique ne sont plus négligeables. Cela nous permettra, en outre, de préciser à quelle condition on peut considérer qu'un écoulement est incompressible.

I Le fluide newtonien

I.1 Retour sur le cas ρ constant

On a établi (5.2) : $\sigma_{ij} = -\mathrm{P}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\mathrm{S}_{ij}$

On obtient immédiatement : $\sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii} = -3\mathrm{P}$

La pression apparaît comme la moyenne des contraintes normales sur la particule fluide.

I.2 Loi générale de comportement des fluides newtoniens

La relation linéaire la plus générale entre $\overset{\Rightarrow}{\tau}$ et $\overset{\Rightarrow}{\mathrm{S}}$ est :

$$\tau_{ij} = \mathrm{A}_{ijlm}\,\mathrm{S}_{lm} \tag{8.1}$$

En outre, on doit avoir :
- A_{ijlm} symétrique en i et j ;
- le tenseur A, du quatrième ordre, doit avoir les mêmes composantes dans toute base orthonormée[1].

On peut alors montrer[2] que les tenseurs du quatrième ordre qui nous intéressent sont de la forme :

$$\mathrm{A}_{ijlm} = \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{lm} + \mu\,(\delta_{il}\,\delta_{jm} + \delta_{im}\,\delta_{jl})$$

On reporte dans (8.1) et, en développant, on obtient facilement :

$$\tau_{ij} = \lambda \text{ div } \overrightarrow{v}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\mathrm{S}_{ij}$$

On en déduit immédiatement la définition générale d'un fluide newtonien :

[1] Le fluide étant un milieu isotrope, il n'existe pas de direction privilégiée ; c'est ce qu'on a vu à ρ constant, il est donc légitime de chercher une loi de la même forme.

[2] C'est un résultat purement mathématique.

Définition : On appelle *fluide newtonien* un matériau isotrope dont la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma_{ij} = -\mathrm{P}\,\delta_{ij} + \lambda\ \mathrm{div}\ \overrightarrow{v}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\mathrm{S}_{ij} \tag{8.2}$$

Avec cette loi de comportement, il n'est plus aussi simple d'interpréter la pression :

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\sigma_{ii}}{3} = -\mathrm{P} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \mathrm{div}\ \overrightarrow{v}$$

I.3 Définition thermodynamique de la pression

Soit une particule fluide de masse volumique ρ et d'énergie interne spécifique[3] u[4]. *A priori* elle n'est pas en équilibre thermodynamique. Si on l'isole, en lui conservant ses propriétés (vitesse, accélération, ...), elle va relaxer jusqu'à atteindre un équilibre en un temps τ_R. Pour un gaz[5], cet équilibre peut être caractérisé par 2 variables indépendantes : nous prendrons ρ et u. On peut alors définir la pression $\check{\mathrm{P}}$, la température $\check{\mathrm{T}}$,... Ces grandeurs sont appelées *grandeurs d'accompagnement de la particule*. C'est cette pression d'accompagnement qui est prise dans la loi de comportement. $\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \mathrm{div}\ \overrightarrow{v}$ traduit le fait que l'on n'est pas à l'équilibre : ce terme caractérise l'effet de la relaxation τ_R devant le temps caractéristique des sollicitations extérieures. τ_R est d'autant plus grand que les molécules possèdent de degrés de liberté[6]. En accord avec l'expérience, on distinguera :

1. **les gaz monoatomiques :** il n'y a que des degrés de liberté de translation. On prendra $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$.
2. **les gaz polyatomiques :** en général, pour des grandes fréquences, on n'a plus $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$. On appellera, *deuxième viscosité*, notée ζ la quantité $\lambda + \frac{2}{3}\mu$.

Dans ce qui suit, on se placera dans le cas $\zeta \neq 0$ et on notera parfois la loi de comportement :

$$\sigma_{ij} = -\mathrm{P}\,\delta_{ij} + \zeta\,\mathrm{div}\ \overrightarrow{v} + 2\mu\left(\mathrm{S}_{ij} - \frac{1}{3}\,\mathrm{div}\ \overrightarrow{v}\,\delta_{ij}\right)$$

I.4 Equations de Navier-Stokes

L'équation de Cauchy (3.8) s'écrit : $\rho\dfrac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \rho g_i + \dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}$

En reportant (8.2), on obtient, en ajoutant la loi de conservation de la masse (chapitre 3) :

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P}^\star + (\lambda+\mu)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\left(\mathrm{div}\ \overrightarrow{v}\right) + \mu\Delta\overrightarrow{v} \\ \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\,\mathrm{div}\ \overrightarrow{v} = 0 \end{cases}$$

On a alors 4 équations pour 5 inconnues (ρ,P,v_i) : il faut faire appel à d'autres principes macroscopiques (thermodynamique).

[3]ie par unité de masse.
[4]Ces 2 grandeurs sont définies même si la particule n'est pas en équilibre.
[5]On pourrait croire que l'on réduit la généralité du problème en se limitant aux gaz ; il n'en est rien car les liquides sont quasiment incompressibles.
[6]τ_R est en effet un temps d'équipartition entre les degrés de liberté.

II Utilisation du premier principe

On a montré dans le chapitre 3 : $\rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sigma_{ij} \mathrm{S}_{ij} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$

Pour tous les fluides newtoniens, *la loi de Fourier* s'applique[7] :

$$\overrightarrow{q} = -\Lambda(\rho, u)\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{T} \tag{8.3}$$

Après de petits calculs passionnants, on obtient :

$$\rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{P}\,\mathrm{div}\ \overrightarrow{v} + \zeta \left(\mathrm{div}\ \overrightarrow{v}\right)^2 + 2\mu \left(\mathrm{S}_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\ \overrightarrow{v}\delta_{ij}\right)^2 + \Lambda \triangle \mathrm{T} \tag{8.4}$$

On voit alors que l'énergie interne évolue sous l'action de différents phénomènes :
- la puissance volumique (réversible) des forces de pression $-\mathrm{P}div\overrightarrow{v}$,
- les échanges de chaleur irréversibles $\Lambda \triangle \mathrm{T}$
- la puissance irréversible des frottements Φ :

$$\Phi = \zeta \left(\mathrm{div}\ \overrightarrow{v}\right)^2 + 2\mu \left(\mathrm{S}_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\ \overrightarrow{v}\delta_{ij}\right)^2$$

III Equation d'évolution de l'entropie spécifique

D'après la thermodynamique classique, on a l'identité : $\mathrm{d}u = -\mathrm{Pd}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \mathrm{Td}s$, qui s'écrit, en tenant compte de la conservation de la masse (3.2) et de (8.4) : $\rho \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{T}}\left(\Phi + \Lambda \triangle \mathrm{T}\right)$. Au second membre, on retrouve bien les 2 processus irréversibles évoqués plus haut[8]. Cette équation justifie que l'on puisse négliger Φ et $\lambda \triangle \mathrm{T}$ (cad frottements et échanges de chaleur) quand les gradients de vitesse et de température sont suffisamment faibles : chaque particule fluide évolue alors de manière isentropique, c'est le *modèle d'écoulement compressible isentropique.*

C'est l'équation $s(\mathrm{P}, \rho) = $ cste qui vient compléter l'équation d'Euler[9] et l'équation de conservation de la masse[10]. Ce modèle est utilisable dans tous les écoulements hors des couches limites et du sillage quand ρ varie : c'est la *dynamique des gaz.* On l'utilise, en première approximation, en acoustique.

IV Quand peut-on considérer qu'un écoulement est incompressible ?

Nous allons[11] pouvoir dire dans quels cas on peut négliger les variations de masse volumique au sein d'un écoulement. Pour simplifier, on utilisera le modèle d'écoulement isentropique et on raisonnera, comme on en a l'habitude maintenant, sur les ordres de grandeurs.

Dire que l'écoulement est incompressible, c'est dire que l'on peut négliger, pour une particule fluide, div $\overrightarrow{v}$ devant les gradients de vitesse qui la déforment.

$$o\left(\mathrm{div}\ \overrightarrow{v}\right) \ll o\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{L}} \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right| \ll \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{L}}$$

On a :

---

[7] T est la température d'accompagnement.

[8] *A priori* $\triangle \mathrm{T}$ n'est pas toujours positif : c'est normal car le terme d'échange dans la variation d'entropie peut compenser le terme d'irréversibilité. Pour avoir uniquement le terme de création d'entropie, il faudrait décomposer ce terme en un terme d'échange et un terme de création.

[9] On reprend bien l'équation d'Euler car on néglige, dans ce modèle, les frottements.

[10] Le premier principe, moins maniable, n'apporte aucune information complémentaire.

[11] Enfin !

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\,.\,\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad}}\;\text{P} \tag{8.5}$$

Cette équation relie les variations de pression à celles de vitesse : il faut relier les variations de pression à celles de masse volumique. Pour un écoulement isentropique, on peut montrer que l'on a :

$$\left(\frac{\partial \text{P}}{\partial \rho}\right)_{s=s_0} = c^2$$

où c est la vitesse du son dans le milieu considéré. La condition d'incompressibilité s'écrit donc maintenant :

$$\left|\frac{1}{\rho c^2}\frac{\text{dP}}{\text{d}t}\right| \ll \frac{\text{U}}{\text{L}}$$

Si on appelle :

- δP l'ordre de grandeur des variations de P ;
- τ le temps caractéristique de ces variations pour une particule fluide que l'on suit[12].

alors on obtient :

$$\boxed{\frac{\delta \text{P}}{\rho c^2 \tau} \ll \frac{\text{U}}{\text{L}}} \tag{8.6}$$

Pour un écoulement stationnaire, cette relation se simplifie car (8.5) devient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\vec{v}\,.\,\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad}}\;\text{P}$$

ce qui donne : $$o\left(\frac{\text{U}}{\tau}\right) = o\left(\frac{\text{U}^2}{\text{L}}\right) = o\left(\frac{\delta \text{P}}{\rho \text{L}}\right)$$

En reportant dans (8.6), on obtient la *condition d'incompressibilité pour un écoulement stationnaire* :

$$\boxed{\text{M}^2 = \left(\frac{\text{U}}{c}\right)^2 \ll 1 \quad \text{où M est le } \textit{nombre de Mach.}}$$

Une application numérique montre que, dans l'air, un écoulement peut être supposé incompressible pour des vitesses allant jusqu'à 100 m.s^{-1}.

[12] C'est donc un temps lagrangien.

Chapter 9

Quelques notions sur la turbulence

L'objectif de cette partie n'est pas de faire un exposé complet de la turbulence mais plutôt de présenter quelques grandes idées sans entrer dans le détail des calculs. Pour en savoir plus, on pourra se reporter, par exemple, à [7].

Notations

D'une façon générale, les grandeurs avec une barre (ex : $\overline{\mathrm{U}}_i$) correspondent à des moyennes temporelles. Les lettres minuscules désignent les fluctuations. On rappelle et on précise les notations car il convient d'avoir les idées bien claires :

- ρ masse volumique du fluide.
- μ viscosité dynamique du fluide.
- ν viscosité cinématique du fluide.
- U_i,V_i vitesse de l'écoulement.
- ω_i vorticité de l'écoulement.
- S_{ij} tenseur de cisaillement.
- σ_{ij} tenseur de contraintes dans le fluide.
- ε énergie dissipée par frottement visqueux par unité de masse.
- λ échelle de Taylor.
- η échelle de Kolmogorov.

I Généralités

I.1 Qu'est-ce que la turbulence ?

La turbulence est une propriété d'un écoulement, non du fluide utilisé. Il n'existe pas de véritable définition de la turbulence. On la caractérise par ses propriétés.

Quand l'écoulement est turbulent, les grandeurs physiques macroscopiques (vitesse, pression) varient de façon rapide et aléatoire. Un écoulement turbulent est nécessairement rotationnel : ainsi, un champ acoustique, même aléatoire, n'est pas turbulent. La turbulence se caractérise aussi par une diffusivité élevée (température, quantité de mouvement, *etc*). Un écoulement turbulent est donc un écoulement à grand nombre de Reynolds.

I.2 Apparition de la turbulence

Aux grands nombres de Reynolds, un écoulement laminaire peut devenir turbulent au voisinage d'un obstacle, d'une aspérité.

I.3 Quantification expérimentale de la turbulence

Expérimentalement, quand on dit qu'un écoulement est turbulent à 4 %, cela signifie simplement que l'écart-type des fluctuations de vitesse est de 4 % de la vitesse moyenne.

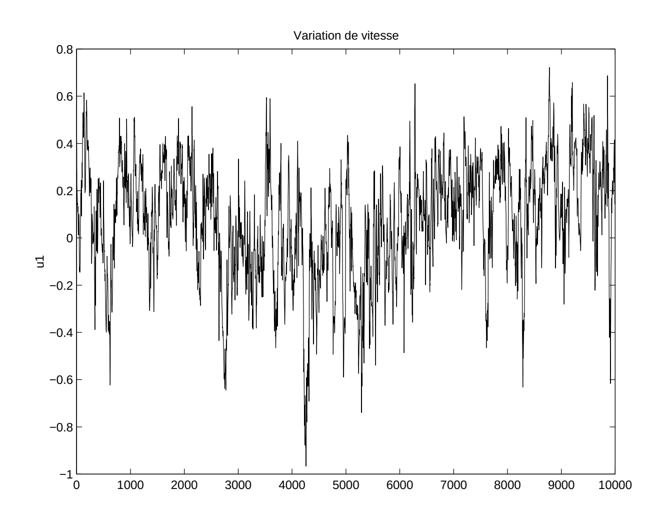


Figure 9.1: Evolution temporelle de la vitesse longitudinale autour de sa valeur moyenne (obtenue par la technique du fil chaud).

II Théorie de la turbulence homogène et isotrope

On se place ici dans le cas d'un écoulement incompressible homogène et isotrope à haut nombre de Reynolds.

homogène : tous les points de l'espace ont mêmes propriétés.

isotrope : il n'existe pas de direction privilégiée.

II.1 Description qualitative

II.1.1 Taille des tourbillons

La turbulence est un mouvement tourbillonaire. Dans un écoulement turbulent, on trouve de nombreux tourbillons de tailles fort différentes. Les plus gros tourbillons sont déterminés par les conditions aux limites. Leur taille caractéristique est de l'ordre de grandeur de la taille de l'écoulement. Les plus petits tourbillons sont déterminés par la viscosité.

II.1.2 Diffusion et dissipation d'énergie

Les gros tourbillons sont principalement responsables de la diffusion de quantité de mouvement : les échelles de longueur caractéristiques du transport et de la diffusion sont donc macroscopiques. L'énergie transportée par le fluide est transmise des gros tourbillons vers les plus petits "en cascade". La dissipation sous forme de chaleur se fait au niveau des petits tourbillons. Les échelles mises en jeu entre les grands tourbillons (temps caractéristiques grands) et les petits (temps caractéristiques petits) sont si différentes qu'il n'y a pas d'interaction forte entre les gros tourbillons et les petits. Ainsi la structure des petites échelles ne dépend pas des effets d'orientation du cisaillement à grande échelle : c'est ce que l'on appelle l'*isotropie des petites échelles* .

II.2 Equations de Navier-Stokes, décomposition de Reynolds

Les équations qui régissent l'écoulement sont (en l'absence de variations de masse volumique) :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{\partial \mathrm{U}_i}{\partial t} + \mathrm{U}_j \dfrac{\partial \mathrm{U}_i}{\partial x_j} & = & -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\mathrm{P}}{\rho}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \dfrac{\partial \mathrm{U}_i}{\partial x_j}\right) & \text{quantité de mouvement} \\ \dfrac{\partial \mathrm{U}_i}{\partial x_i} & = & 0 & \text{continuité} \end{array}\right.$$

Le caractère non-linéaire d'un tel système le rend insoluble analytiquement. On suppose tout d'abord que les champs de vitesse et de pression peuvent être décomposés en la somme d'un champ moyen et de fluctuations de valeur moyenne nulle : c'est la *décomposition de Reynolds.*

C'est-à-dire : $\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{U}_i & = & \overline{\mathrm{U}}_i + u_i \\ \mathrm{P} & = & \overline{\mathrm{P}} + p \end{array}\right.$.

Dans ces conditions, on montre que : $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \overline{\mathrm{U}_i}}{\partial t} + \overline{\mathrm{U}_j}\dfrac{\partial \overline{\mathrm{U}_i}}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\overline{\mathrm{P}}}{\rho}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\dfrac{\partial \overline{\mathrm{U}_i}}{\partial x_j} - \overline{u_i\,u_j}\right) \\ \dfrac{\partial \overline{\mathrm{U}_i}}{\partial x_i} \quad\quad = 0 \end{array}\right.$.

Les termes $\overline{u_i\,u_j}$ correspondent aux *tensions de Reynolds* et proviennent de la non-linéarité des équations de Navier-Stokes.
En utilisant le tenseur de cisaillement S_{ij}, on introduit le tenseur de contraintes dans le fluide :

$$\overline{\sigma_{ij}} = -\overline{\mathrm{P}}\delta_{ij} + 2\mu\overline{\mathrm{S}_{ij}} - \rho\overline{u_i\,u_j}$$

On remarque que le système précédent comporte plus d'inconnues que d'équations et qu'il fait intervenir des moments d'ordre 2 : c'est le problème (général) dit de la *fermeture des équations*. Si on écrivait les équations pour les moments d'ordre n, on obtiendrait des termes d'ordre $n+1$. Pour résoudre ce système, on est donc obligé de faire des hypothèses sur les moments d'ordre supérieur.

II.3 Equation de conservation de l'énergie

Soient $(\mathbf{E})_m$ l'énergie cinétique de l'écoulement moyen et e l'énergie cinétique turbulente moyenne par unité de masse.

II.3.1 Variation de l'énergie de l'écoulement moyen

En multipliant l'équation de Reynolds par U_i et en prenant la moyenne après sommation sur i, on obtient :

$$\left(\frac{\mathrm{d}(\mathbf{E})_m}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\overline{\mathrm{U}_i}\frac{\overline{\mathrm{P}}}{\rho}\delta_{ij} + \nu\overline{\mathrm{U}_i}\frac{\partial \overline{\mathrm{U}_i}}{\partial x_j} - \overline{\mathrm{U}_i}\overline{u_i\,u_j}\right) - \nu\left(\frac{\partial \overline{\mathrm{U}_i}}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial \overline{\mathrm{U}_i}}{\partial x_j}\overline{u_i\,u_j}$$

ou encore : $\left(\dfrac{\mathrm{d}(\mathbf{E})_m}{\mathrm{d}t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(-\overline{\mathrm{U}_i}\dfrac{\overline{\mathrm{P}}}{\rho}\delta_{ij} + 2\nu\overline{\mathrm{U}_i\mathrm{S}_{ij}} - \overline{\mathrm{U}_i}\overline{u_i\,u_j}\right) - 2\nu\overline{\mathrm{S}_{ij}\mathrm{S}_{ij}} + \dfrac{\partial \overline{\mathrm{U}_i}}{\partial x_j}\overline{u_i\,u_j}$

Les trois premiers termes correspondent aux flux d'énergie associés à la pression, aux forces de contraintes visqueuses et turbulentes : leur rôle est essentiellement de redistribuer l'énergie à l'intérieur du volume. Les 2 derniers termes représentent les contraintes visqueuses et le tenseur de Reynolds. Leur rapport vaut environ l'inverse du nombre de Reynolds de l'écoulement donc *la viscosité a un effet négligeable sur la perte d'énergie cinétique par l'écoulement moyen.* Le dernier terme représente le transfert d'énergie cinétique entre l'écoulement moyen et les tourbillons.

II.3.2 Equation de e

En multipliant l'équation de Navier-Stokes par U_i et en prenant la moyenne, on obtient par soustraction de l'équation obtenue pour le mouvement moyen :

$$\left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right) = \overline{\mathrm{U}_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\overline{u_i u_i}}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\overline{p u_j}}{\rho} + \frac{1}{2}\overline{u_i u_i u_j} - 2\nu\overline{u_i \mathrm{S}_{ij}}\right) - \nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \frac{\partial \overline{\mathrm{U}_i}}{\partial x_j}\overline{u_i\,u_j}$$

La variation de e est liée :
- aux corrélations pression-vitesse ;
- au transport (diffusion) par les fluctuations de vitesse (moment d'ordre 3) ;
- au transport des contraintes visqueuses ;
- au terme de dissipation visqueuse $\varepsilon = \nu\overline{\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}} = 2\nu\overline{s_{ij}s_{ij}}$;
- au terme de production $-\dfrac{\partial \overline{\mathrm{U}_i}}{\partial x_j}\overline{u_i\,u_j}$: on remarque que c'est le même terme que pour $(\mathbf{E})_m$ mais avec un signe opposé.

La dissipation visqueuse est beaucoup plus importante ici que que pour l'écoulement moyen : nous verrons plus loin que les gradients de vitesse augmentent quand la taille des tourbillons diminue.

En régime stationnaire, dans un écoulement homogène, toute l'énergie transmise par l'écoulement moyen $\overline{u_i\, u_j}\dfrac{\partial \overline{\mathrm{U}_i}}{\partial x_j}$ est dissipée par viscosité $-\nu\overline{\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}}$ après un mécanisme de transfert en cascade vers les tourbillons de plus en plus petits donc :

$$\overline{u_i\, u_j}\frac{\partial \overline{\mathrm{U}_i}}{\partial x_j} = -\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

II.4 Théorie de Kolmogorov

II.4.1 Hypothèse

On suppose que l'énergie est transmise par l'écoulement moyen aux plus grands tourbillons puis, de proche en proche, aux plus petits où elle est dissipée par viscosité.

II.4.2 Echelles

Dans tout ce qui suit, on se place dans le cas où la turbulence est isotrope. On définit une échelle de longueur l et une échelle de vitesse v :

$$v^2 = \frac{1}{3}\overline{u_i u_i} \qquad \frac{\overline{u_2^2}\,l}{3} = \int_0^{+\infty} u_2\left(x_2\right)u_2\left(0\right)\,\mathrm{d}x_2$$

l est la dimension caractéristique des gros tourbillons. Elle s'apparente aussi à la *longueur de mélange*. On a alors $\mathrm{S}_{ij} \simeq \dfrac{v}{l}$.

II.4.3 L'échelle de Taylor λ

En turbulence isotrope, on peut montrer que : $\varepsilon = 15\nu\overline{\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2}$.

On définit une échelle de longueur λ par :

$$\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2} = \frac{v^2}{\lambda^2}$$

λ est une échelle *a priori* bizarre car elle fait intervenir des vitesses à grande échelle alors qu'elle fait partie des petites échelles de l'écoulement mais elle est pratique car :

- on peut évaluer facilement des termes du type s_{ij} par $\dfrac{v}{\lambda}$;
- on peut définir un nombre de Reynolds qui caractérise la turbulence :$\mathcal{R}_{e\lambda} = \dfrac{v\lambda}{\nu}$ et qui est égal au rapport des temps caractéristiques associés respectivement à S_{ij} et à s_{ij}.

L'énergie turbulente est donc extraite du mouvement moyen par des tourbillons de taille l correspondant à une énergie transportée par unité de masse de v^2.

II.4.4 L'échelle de Kolmogorov η

L'échelle de Kolmogorov correspond à la taille caractéristique des plus petits tourbillons, c'est-à-dire ceux où a lieu la dissipation d'énergie. A partir des équations de conservation de l'énergie, on montre que :

$$\boxed{\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

Donnons ici quelques ordres de grandeur :

dimension L cm	vitesse U $m.s^{-1}$	échelle η mm	fréquence de Kolmogorov Hz
1	1	1	100
1	10	0,05	10^4
100	10	0,3	3.10^4

On peut également déterminer une vitesse caractéristique de Kolmogorov.

$$\boxed{v_{\mathrm{K}} = (\nu\varepsilon)^{\frac{3}{4}}}$$

On a alors : $$\mathcal{R}_{e\eta} = \frac{\eta v_{\mathrm{K}}}{\nu} = 1$$

A cette échelle, les effets dissipatifs sont du même ordre que les phénomènes convectifs.

> L'échelle de Kolmogorov nous donne la taille caractéristique des plus petits tourbillons qui dissipent l'énergie turbulente et la limite de la résolution spatiale. Les fréquences supérieures à la fréquence de Kolmogorov n'ont pas de signification physique.

Soient k le vecteur d'onde associé à une longueur l et $\mathcal{E}(k)$ la densité spectrale d'énergie correspondant aux tourbillons de taille l (de vecteur d'onde k) (*cf* figure 9.2). On montre alors [3] que, pour les grands vecteurs d'onde k, on a :

$$\boxed{\mathcal{E}(k) = \mathrm{C^{te}}\ \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}}$$

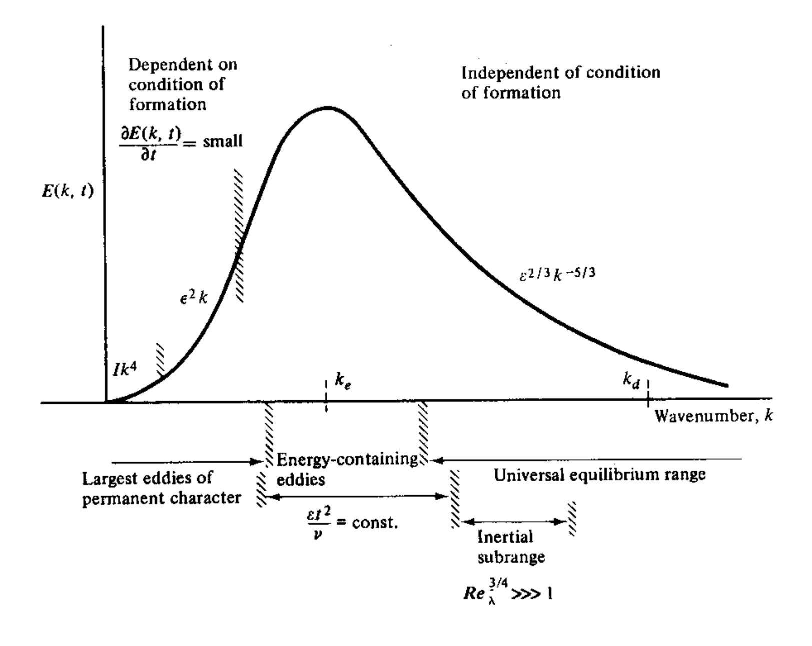


Figure 9.2: Spectre énergétique [D'après Hinze (1975)]

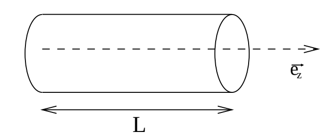
Dans le domaine des petits vecteurs d'onde, la densité spectrale d'énergie varie en k^4 (résultat de la théorie de Batchelor-Proudman). C'est à ces nombres d'onde qu'on a les plus gros tourbillons. La dépendance vis-à-vis du temps décroît avec k.

Appendix A

Quelques solutions de l'équation de Navier-Stokes

Nous allons étudier quelques-unes des solutions particulières de l'équation de Navier-Stokes dans des cas où l'on n'a pas de difficultés mathématiques particulières mais où on trouve quand même des idées physiques importantes.

I Ecoulement de Poiseuille cylindrique



On se place en régime stationnaire. On considère l'écoulement incompressible d'un fluide visqueux newtonien dans une conduite cylindrique. On néglige la pesanteur. La variation de pression sur une longueur L de cylyndre est notée $(-\triangle \mathrm{P})$ avec $\triangle \mathrm{P} > 0$.

I.1 Calcul du champ de vitesse

I.1.1 Les symétries du problème

- On cherche un champ de vitesse unidirectionnel selon x_3 : $\quad \overrightarrow{v} = v_3(r, \theta, x_3)\overrightarrow{e_3}$.
- La conservation de la masse implique que v_3 ne dépend pas de x_3.
- le problème étant symétrique autour de Ox_3, v_3 ne dépend pas de θ.

conclusion :

- $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{e_3}$.
- Les termes non linéaires de l'accélération sont rigoureusement nuls : $\quad \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{v} = 0\,.$

I.1.2 Les conditions aux limites

Le caractère visqueux du fluide interdit tout glissement du fluide sur les parois : $\quad v(r) = 0$

I.1.3 Intégration de l'équation de Navier-Stokes

On a : $\quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{P}) = -\dfrac{\triangle \mathrm{P}}{\mathrm{L}}\overrightarrow{e_3}$

Compte-tenu de tout ce qui précède, l'équation de Navier-Stokes se réduit, en projection sur Ox_3, à :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r}\right) = -\frac{\triangle \mathrm{P}}{\mathrm{L}\mu} \tag{A.1}$$

Deux intégrations successives donnent :

$$v(r) = -\frac{\triangle \mathrm{P}}{4\mathrm{L}\mu}r^2 + a\ln r + b \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ 2 constantes.}$$

La vitesse étant finie au centre, on a nécessairement $a = 0$.

Comme $v(r) = 0$, on a : $$\boxed{v(r) = \frac{\triangle \text{P}}{4\text{L}\mu}\left(\text{R}^2 - r^2\right)}$$

I.2 Débit volumique et capillarité

On calcule le débit volumique défini par : $\text{D} = \iint_{\text{S}} \vec{v}.\overrightarrow{\text{dS}}$ où S est une section du cylindre.

On trouve : $$\text{D} = \frac{\pi \triangle \text{PR}^4}{8\mu \text{L}}$$

La dépendance en R^4 a une conséquence immédiate : si on prend 100 tubes de diamètre R/10, on a la même surface d'écoulement qu'avec un seul tube de rayon R mais on a un débit volumique 100 fois plus faible.

I.3 Force et moment exercés par le fluide sur le tube

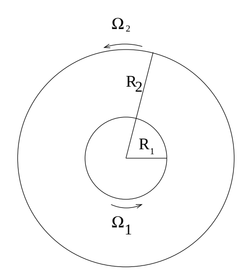
Par raison de symétrie,
- les forces de pression donnent une résultante nulle.
- la résultante est portée par $\overrightarrow{e_3}$. Une analogie avec l'écoulement plan vu dans le chapitre 5 conduit à :

$$\vec{f} = \iint_{\text{S}} \overrightarrow{\text{d}f} = -\iint_{\text{S}} \mu \left(\frac{\partial \text{V}}{\partial r}\right)_{r=\text{R}} \text{dS}\overrightarrow{e_3}$$

Si ce dernier point ne vous paraît pas évident, il n'y a qu'à écrire le torseur des contraintes en M et en prendre les composantes selon la normale qui est orientée par $\overrightarrow{e_r}$:

$$\overrightarrow{\text{d}f}(\text{M}, \overrightarrow{e_r}) = \vec{\vec{\sigma}}\,(\text{M}).\overrightarrow{e_r}\text{dS} = -\begin{pmatrix} -\text{P} & 0 & \mu\frac{\text{dV}}{\text{d}r} \\ 0 & -\text{P} & 0 \\ \mu\frac{\text{dV}}{\text{d}r} & 0 & -\text{P} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{dS}$$

II Ecoulement de Couette cylindrique



On considère *deux cylindres coaxiaux en rotation uniforme* séparés par du fluide de viscosité μ. On s'intéresse à un écoulement *stationnaire* dans le plan perpendiculaire à l'axe des cylindres en *négligeant les effets de la gravité*.

II.1 Champs de vitesse et de pression

On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, x_3). Par raison de symétrie, $\vec{v}$ ne dépend pas de θ et $\vec{v} = \text{V}\overrightarrow{e_\theta}$. on s'intéresse à un écoulement plan donc $\vec{v}$ ne dépend pas de x_3 non plus. Par ailleurs, le gradient de pression est nul selon $\overrightarrow{e_\theta}$.

$$\vec{v} = v(r)\overrightarrow{e_\theta}$$

En tenant compte de la stationnarité et en projetant l'équation ne Navier-Stokes, il vient :

$$\begin{cases} -\rho\dfrac{v^2}{r} &= -\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial r} \\ 0 &= \mu\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(r\mathrm{V})}{\mathrm{d}r}\right) \\ 0 &= -\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_3} \end{cases}$$

On en déduit : que P ne dépend que de r. Après une double intégration de la deuxième équation, on a :

$$\begin{cases} \rho v^2 &= \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}r} \\ \mathrm{V} &= \mathrm{K}r + \dfrac{\mathrm{K}'}{r} \end{cases} \quad \text{où K et K}' \text{ sont des constantes d'intégration.}$$

Par ailleurs, on a les conditions aux limites : $\begin{cases} \mathrm{R}_1\Omega_1 = \mathrm{KR}_1 + \dfrac{\mathrm{K}'}{\mathrm{R}_1} \\ \mathrm{R}_2\Omega_2 = \mathrm{KR}_2 + \dfrac{\mathrm{K}'}{\mathrm{R}_2} \end{cases}$

On trouve : $\begin{cases} \mathrm{K} = \dfrac{\mathrm{R}_2^2\Omega_2 - \mathrm{R}_1^2\Omega_1}{\mathrm{R}_2^2 - \mathrm{R}_1^2} \\ \mathrm{K}' = \dfrac{(\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2)^2}{\mathrm{R}_2^2 - \mathrm{R}_1^2}(\Omega_1 - \Omega_2) \end{cases}$

On en déduit la pression par intégration :

$$\mathrm{P} = \rho\mathrm{K}^2\frac{r^2}{2} - \frac{\mathrm{K}'^2}{2r^2} + 2\mathrm{KK}'\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (r_0\text{, constante d'intégration})$$

II.2 force et moment s'exerçant sur une longueur L de cylindre

Une fois n'est pas coutume : écrivons le torseur des contraintes sur la base de projection cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_3})$:

$$\overrightarrow{\mathrm{d}f} = \begin{pmatrix} -\mathrm{P} & \mu r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{\mathrm{V}}{r}\right) & 0 \\ \mu r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{\mathrm{V}}{r}\right) & -\mathrm{P} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{P} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{dS} = \begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ -\mu r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{\mathrm{V}}{r}\right) \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{dS}$$

On a donc $\overrightarrow{\mathrm{d}f}$ de la forme $\mathrm{A}\overrightarrow{e_r} + \mathrm{B}\overrightarrow{e_\theta}$ et $\mathrm{dS} = r\mathrm{L}d\theta$. A et B ne dépendant que de r, il est clair que la résultante des forces de contraintes est nulle.
Pour le moment résultant, on a immédiatement :

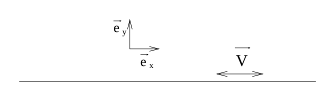
$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathrm{L}\int_0^{2\pi} \mathrm{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ -\mu r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{\mathrm{V}}{r}\right) \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}\theta$$

qui donne, tous calculs faits (on se place bien sûr en $\mathrm{R} = \mathrm{R}_1$ ou en $\mathrm{R} = \mathrm{R}_2$) :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\mathrm{R}) = \pm\frac{4\pi\mu\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\frac{(\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2)^2}{\mathrm{R}_2^2 - \mathrm{R}_1^2}(\Omega_1 - \Omega_2)\overrightarrow{e_3}$$

avec le signe + si on est en $\mathrm{R} = \mathrm{R}_2$ et le signe − si on est en $\mathrm{R} = \mathrm{R}_1$.

III Ecoulement près d'un plan oscillant parallèlement à sa surface



On a un plan oscillant avec la pulsation ω, c'est-à-dire que sa vitesse est de la forme : $\overrightarrow{V} = V_0 e^{-i\omega t}\overrightarrow{e_1}$. On suppose qu'on est à faible nombre de Reynolds de telle sorte que, dans l'équation de Navier-Stokes, on *négligera les termes non linéaires de l'accélération devant les forces de viscosité.*

III.1 Champ de vitesse

On se place en coordonnées cartésiennes. Le système étant invariant par translation selon Ox_3 et selon Ox_1, on en déduit que $\overrightarrow{v}$ ne dépend que de x_2. De plus, x_1Ox_2 étant plan de symétrie, on a $v_3 = 0$. L'équation de conservation de la masse donne alors, comme $v_2(0) = 0$, que v_2 est nulle.

Il vient donc : $$\overrightarrow{v} = V(x_2)\overrightarrow{e_1}$$

L'équation de Navier-Stokes se réduit à : $$\rho\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \rho\overrightarrow{g} + \mu\Delta\overrightarrow{v}$$

On projette sur $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ et on trouve (sachant qu'on a un gradient de pression nul selon Ox_1) :

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial V}{\partial t} = \mu\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \\ 0 \quad = -\dfrac{\partial P}{\partial x_2} - \rho g \end{cases} \tag{A.2}$$

On a une répartition hydrostatique des pressions selon Ox_2. On suppose le régime transitoire éteint, c'est-à-dire que l'on cherche une solution de *régime forcé* de la forme :

$$V(x_2, t) = \text{Re}\, e\left\{f(x_2)e^{i\omega t}\right\}$$

En reportant dans (A.2), on obtient une équation différentielle pour f : $f''(x_2) - \dfrac{i\omega\rho}{\mu}f(x_2) = 0$

On pose alors : $$\delta \triangleq \sqrt{\frac{2\mu}{\omega\rho}}$$

Comme : $i = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$, on a $f(x_2) = A\exp\left((1+i)\dfrac{x_2}{\delta}\right) + B\exp\left(-(1+i)\dfrac{x_2}{\delta}\right)$

Pour ne pas avoir de divergence quand x_2 tend vers $+\infty$, on a nécéssairement $A = 0$.

Donc : $$V(x_2, t) = v_0\exp\left(-\frac{x_2}{\delta}\right)\exp\left(i\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)\right)\right)$$

avec : $$\frac{2\pi}{\lambda} \triangleq \frac{1}{\delta}\,;\ \omega \triangleq \frac{2\pi}{T} \text{ et } V(0,t) = v_0$$

δ est l'épaisseur caractéristique sur laquelle l'influence du mouvement de la plaque est sensible.

III.2 force exercée sur le plan par unité de surface

$$f_1 = \mu\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} = \sqrt{2}\frac{\mu v_0}{\delta}\exp\left(i\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

On constate que la force exercée sur le plan présente un retard de phase par rapport à la vitesse.

Appendix B

Quelques techniques expérimentales

Dans ce complément, nous allons présenter brièvement quelques techniques utilisées couramment pour étudier les écoulements. Bien que ces diverses techniques aient été mises en place successivement, elles sont toutes utilisées car elles ne donnent pas accès aux mêmes données et ne sont donc pas redondantes.

I L'anémométrie à fil chaud

I.1 Principe

Le principe est très simple. La sonde se compose d'un mince fil de platine dans lequel on fait circuler un courant tel que la température du fil reste constante[1] : plus la vitesse de l'écoulement sur le fil est grande, plus l'intensité doit être importante. Seule la composante de vitesse orthogonale au fil intervient.

On utilise beaucoup des sondes qui ont 2 fils orthogonaux : cela permet d'accéder à deux composantes de la vitesse.

I.2 Avantages et inconvénients

Pour peu qu'on dispose d'une chaîne d'acquisition suffisamment rapide, il est assez aisé d'obtenir rapidement un grand nombre de données sur l'écoulement en un point : ce qui permet de faire, par exemple, une étude de l'énergie turbulente.

Cette méthode peut se réveler assez coûteuse en utilisation : en effet, le fil utilisé est fin, très fragile et relativement cher. Mais son plus gros inconvénient est sans doute la nécessité d'introduire un appareil de mesure dans l'écoulement que l'on étudie ce qui peut perturber les résultats. . . .

II La vélocimétrie par images de particules (PIV)

II.1 Présentation

Cette technique s'est réellement développée depuis le début des années 90 : le principe est relativement simple et les bases de la méthode datent des années 70 mais pour être efficace, il faut pouvoir disposer d'une assez grande puissance de calcul ce qui n'a été rendu possible qu'avec l'arrivée d'ordinateurs puissants et de coût modeste.

La vélocimétrie par images de particules ou PIV est une méthode de mesure de vitesse dans les écoulements fluides non intrusive[2] (à la différence de l'anémométrie à fil chaud) qui permet d'obtenir une image du champ de vitesse dans un plan et non l'évolution temporelle de la vitesse en un point de l'écoulement

[1] La résistance du fil dépend de la température : il suffit de mesurer la tension et le courant à ses bornes pour connaître la température.

[2] C'est-à-dire qu'on n'introduit aucun appareil de mesure directement dans l'écoulement.

II.2 Principe

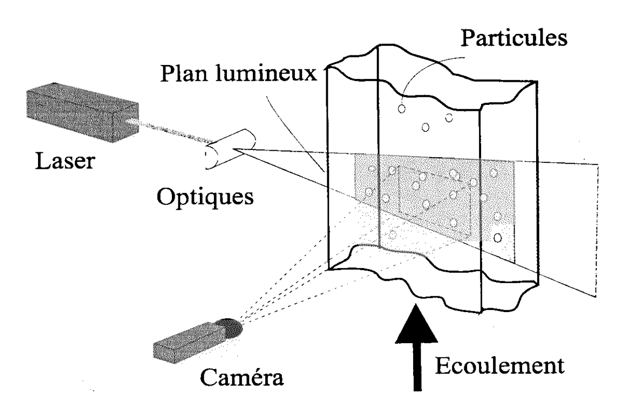


Figure B.1: Schéma global d'un montage PIV.

On ensemence l'écoulement au moyen de particules bien choisies. Un laser émet un faisceau lumineux. Au moyen d'une lentille cylindrique, on transforme ce faisceau en plan lumineux. On oriente le plan laser dans l'écoulement. On prend, au moyen d'une caméra, deux images du plan laser séparées par un intervalle de temps très court Δt. Ensuite, on traite ces images. Pour cela, on découpe les images obtenues en une multitude de petites cellules, pour lesquelles on détermine par autocorrélation ou par intercorrélation[3] le déplacement moyen sur l'image $\Delta \mathrm{X}$. On déduit alors aisément la vitesse moyenne pour chaque cellule puisque :

$$\boxed{\vec{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{S}\overrightarrow{\Delta \mathrm{X}}}{\Delta t}}$$

où S est le facteur d'échelle de l'image, défini comme l'inverse du grandissement. On dispose alors des composantes V_x et V_y dans le plan d'observation.

Une fois qu'on a le champ de vitesse, on peut déterminer une composante de la vorticité par :

$$\boxed{\omega_z = \frac{\partial \mathrm{V}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{V}_x}{\partial y}}$$

[3] selon la méthode de saisie d'images retenue (*cf* plus loin).

Pour en savoir plus...

[1] S. Candel, *Mécanique des Fluides*, Editions DUNOD, 1990

[2] E. Guyon, JP. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique Physique*, Interéditions/CNRS, 1991.

[3] J.O. Hinze, *Turbulence, Second Edition*, Mc Graw-Hill, 1975.

[4] Rhyming, *Dynamique des Fluides*, Editions Presse Universitaire Romande.

[5] G.K. Batchelor, *Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press , 1988.

[6] Landau, Lifschitz, *Mécanique des Fluides*, Editions MIR.

[7] D.J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics, Second Edition*, Oxford Science Publications, 1988.

[8] Gueutal, Courbage, *Mathématiques pour la Physique - Tome I*, Editions Eyrolles.

Index

Contents